

**République Algérienne Démocratique et Populaire**  
**Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique**

---

**Département de l'Electrotechnique**  
**Faculté des Sciences de l'Ingénieur**  
**Université Hassiba Benbouali**  
**Chlef, Algérie**

---

## **MEMOIRE DE MAGISTER**

---

Présenté par :

**Mostefaoui Abdelkader**

**Ingénieur en Informatique, option : Software**  
Pour obtenir le diplôme de :  
**Magistère en *Electrotechnique***  
**Option : *Réseaux Electriques.***

**Thème**

**Etude de la répartition optimale des puissances dans un réseau électrique par la Programmation non linéaire.**

**Soutenue le : 14 / 10 / 2008**

**Devant le jury composé de :**

Président :	Mr. Bachir Belmadani	Professeur	(UHB. Chlef)
Encadreur :	Mr. Mostefa Rahli	Professeur	(USTO-MB-Oran)
Co-Encadreur :	Mr. Mohamed Mostefaoui	Charge de cours	(UHB. Chlef)
Examineurs :	Mr. Mohamed Benarous	Maitre de conférence	(UHB. Chlef)
	Mr. Rabah Ouiddir	Maître de conférence	(U.Sidi Belabes)

*A ma très chère mère et mon très cher père.  
Sachez qu'aucun mot d'aucune langue n'est assez fort pour vous exprimer ma gratitude  
et vous remercier de tout ce que je vous dois.*

*A ma femme et mes enfants*

*A mes frères et mes sœurs*

---

## REMERCIEMENTS

---

**E**n avant propos, je voudrais exprimer toute ma reconnaissance ainsi que ma gratitude à Monsieur **M. Rahli**, Professeur à Université des Sciences et de la Technologie d'Oran « Mohamed Boudiaf », qui m'a permis d'effectuer cette recherche et qui a bien voulu la diriger. Aussi, je saisis cette occasion pour le remercier également de l'aide qui ma apporté et la confiance qu'il m'a témoignée dans le cadre de ces différentes activités.

**J**e remercie aussi Mr M. Mostefaoui Chargé de cours à l'Université Hassiba Benbouali de Chlef pour la plus essentielle de l'aide qui ma apporté autant que co-encadreur dans ce travail.

**J**e tiens particulièrement à remercier Mr B. Belmadani professeur à l'Université Hassiba Benbouali de Chlef, pour l'attention qui nous a apporté durant notre formation comme responsable de notre Post Graduation ainsi que l'honneur qu'il nous fait en acceptant de présidé la soutenance de ce travail .

**J**e remercie aussi Mr M. Benarous Maître de conférence à l'Université Hassiba Benbouali de Chlef et Mr R. Ouidir Maître de conférence à l'Université de Sid Belabes d'avoir bien voulu juger ce travail.

**J**e remercie tous les enseignants du département d'Electrotechnique et du département d'Informatique de l'Université Hassiba Benbouali de Chlef, pour toute l'aide qui ont voulait nous apportés.

**E**nfin je n'oublie pas de remercier mon ami et collègue Mr M. Rezig

# Résumé

## Résumé

Dans ce mémoire, nous avons présenté une approche de formulation et un algorithme de solution du problème de la répartition optimale des puissances actives d'un réseau électrique par la programmation non linéaire. Les méthodes conventionnelles d'optimisation de l'écoulement des puissances actives ont été revues. Ce modèle basé sur la programmation non linéaire, plus simple a été introduit pour le contrôle à temps réel.

Plusieurs modèles sont présentés pour résoudre un tel problème. Néanmoins, la programmation non linéaire reste le modèle le plus pratique dans ce cas pour plusieurs raisons, dont on citera : sa simplicité, sa fiabilité, ainsi que sa stabilité.

Nous avons développé une solution algorithmique, basé sur cinq (05) méthodes non linéaires choisies, qui à permet de produire un outils (logiciel d'optimisation) pratique qui peut d'être utilisé pour un dispatching réel, comme un outils pédagogique et aussi comme un outils de comparaison pour la validation d'autre modèles

Le présent algorithme de solution, basé sur la programmation non linéaire, fournit une précision acceptable du point de vue pratique et requiert un temps de calcul court pour obtenir une bonne valeur des équipements de contrôle. Ainsi, il sera particulièrement efficace pour assister un opérateur de réseau électrique dans le control et l'optimisation de l'écoulement des puissances dans le réseau électrique

## Abstract

In this thesis, we introduced an approach of formulation and an algorithm of resolution of the problem of the optimum power flow the active potency of an electricity network by. Conventional methods of optimum power flow were seen again. This model based on non linear programming, simpler was introduced for a real time control.

Several models are introduced to resolve such problem. However, non linear programming remains the most practical model in that case for several reasons, of which we can name: his simplicity, its reliability, as well as its stability. We developed an algorithmic solution, based on five (05) chosen non linear methods, which allows producing a practice tools (software of optimization) which can be used for a real dispatching, as a pedagogic tools and also as a comparison and validation tools of others models

The present algorithm of resolution, based on non linear programming, provides an allowable practical precision and requests a short time of counting to acquire a good value of the control equipment. So, it will be particularly efficient to assist an operator in the control and the optimization of the power flow in the electricity network

# SOMMAIRE

## SOMMAIRE

<b>INTRODUCTION GENERALE</b> .....	7
<b>CHAPITRE I : ECOULEMENT DE PUISSANCE</b> .....	11
1.1. Introduction .....	13
1.2. La reconfiguration de réseau de transport.....	14
1.2.1. La formation du schéma et son évaluation .....	14
1.2.2. L'évaluation du schéma de formation.....	14
1.3. Problème d'optimisation de la topologie des réseaux .....	14
1.4. Comparaison entre les lignes aériennes et les câbles.....	15
1.4.1. Ligne aérienne.....	16
1.4.1.1. Avantages.....	16
1.4.1.2 Inconvénients.....	16
1.4.2 Câble.....	16
1.4.2.1 Avantages.....	16
1.4.2.2 Inconvénients.....	16
1.5 Structure des réseaux.....	16
1.5.1 Réseau maillé ou connecté.....	17
1.5.2 Réseau en boucle.....	17
1.5.3 Réseau radial ou en étoile.....	18
1.6 L'effet de réseau de transport sur la qualité du service.....	18
1.7 Le rôle du réseau de grand transport .....	19
1.7.1 Le transport systématique.....	20
1.7.2 Le transport de compensation.....	21
1.8 Le rôle des réseaux de répartition.....	21
1.9 Les grands enjeux de la conduite des systèmes électriques.....	22
1.10 Les isolateurs.....	24
1.11 Présentation de quelques systèmes FACTS .....	24
1.12 Les équations de l'écoulement de puissance .....	26
1.12.1 Equations de l'écoulement de puissances dans les lignes.....	27
1.12.2 Quelques observations sur les équations de l'écoulement de puissance ....	28
1.12.3 Classification des variables de l'écoulement de puissance.....	29
1.13. Algorithme de Newton Raphson appliquée aux équations de l'écoulement de puissance .....	29
1.14. Conclusion .....	31
<b>CHAPITRE II : MODELISATION ET CALCUL DES L'ECOULEMENTS OPTIMALS DES PUISSANCES</b> .....	32
II.1. Introduction .....	33
II.2. Formulation du problème.....	33
II.3. Constitution d'un réseau.....	34
II.3.1. Les générateurs.....	34
II.3.2. Les charges.....	34
II.3.3. Le réseau proprement dit.....	35

II.4. Bilans de puissances et balancier.....	36
II.4.1. Bilans de puissances.....	36
II.4.2. Le générateur balancier.....	36
II.5. Notions de modélisation du réseau.....	40
II.6. Ecoulement des puissances dans un système énergétique.....	43
II.6.1. Méthode de Newton-Raphson.....	46
II.6.1.1. Le principe de l'algorithme de Newton-Raphson.....	46
II.6.1.2. L'algorithme de Newton-Raphson pour un système d'équations.....	48
II.6.1.3. Application de la Méthode de Newton-Raphson pour les Puissances Actives et Réactives.....	49
II.6.2. Méthode de Gauss-Seidel.....	52
<b>CHAPITRE III : LES METHODES D'OPTIMISATION.....</b>	<b>57</b>
III.1. Introduction.....	58
III.2. Problèmes d'optimisation.....	59
III.3. Les méthodes d'optimisations.....	60
III.3.1. La programmation linéaire.....	63
III.3.2. Programmation linéaire en nombres entiers.....	65
III.3.3. Programmation quadratique.....	66
III.3.4. Programmation non-linéaire.....	67
III.3.5. Les Heuristiques.....	68
III.3.6. Les métaheuristiques.....	70
III.4. Conclusion.....	76
<b>CHAPITRE IV : MODELISATION OPTIMISATION PAR LA PROGRAMMATION NON LINEAIRE.....</b>	<b>77</b>
IV.1 Introduction.....	78
IV.2 Formulation mathématique du problème.....	79
IV.2.1 Introduction.....	79
IV.2.2 Principe fondamental .....	79
IV.2.3. Méthode de pénalité.....	80
IV.2 Méthode de Davidon-Fletcher-Powell.....	81
IV.3 Méthode de Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno.....	83
IV.4 Méthode de Broyden.....	84
IV.5 Méthode des moindres carrés.....	86
IV.6 Méthode de Pearson.....	91
<b>CHAPITRE V : APPLICATION.....</b>	<b>94</b>
V.1 Introduction.....	95
V.2 Présentation des données du réseaux d'Application 25 nœuds.....	96
V.3 Application des méthodes sur le réseau 25 noeuds .....	98
V 3.1 Méthode de D.F.P.....	100
V 3.2. Méthode de B.F.G.S.....	102
V.3.3 Méthode de Pearson.....	104
V.3.4 Méthode de Broyden.....	106
V.3.5 Méthode des Moindres Carrés.....	108
V.3.6 Résumé des résultats (réseau 25noeuds) .....	110

V.4 Présentation des données du réseaux d'Application 14 nœuds.....	111
V.5 Application des méthodes sur le réseau 14 nœuds .....	113
V 5.1 Méthode de D.F.P.....	114
V 5.2. Méthode de B.F.G.S.....	116
V.5.3 Méthode de Pearson.....	118
V.5.4 Méthode de Broyden.....	120
V.5.5 Méthode des Moindres Carrés.....	122
V.5.6 Résumé des résultats (réseau 25noeuds) .....	124

<b>CONCLUSION</b> .....	125
-------------------------	-----

**BIBLIOGRAPHIE**

---

## INTRODUCTION GENERALE

---

Dans les sociétés actuelles, industrialisés et technologiquement développés, la disponibilité de l'énergie électrique occupe une importance primordiale. L'énergie électrique ne permet pas seulement le confort dont en bénéficient les usagers, mais également en bénéficient les industries et les services (transport, hôpitaux services publics etc..). L'énergie constitue donc un support essentiel pour le développement des sociétés modernes. De ce fait, la qualité, la continuité de service et l'approvisionnement sont pris au sérieux par les responsables des compagnies électriques. Il s'agit tout d'abord en premier lieu de produire, de transporter cette marchandise et de faire sa distribution en même temps.

Avoir donc ce produit final nécessite des moyens de transport pour acheminer le produit au client, ce dernier se situe le plus souvent dans des endroits lointains par rapport aux centres de productions.

Vu l'augmentation quotidienne de la demande en énergie électrique due à l'évolution rapide des charges, le réseau électrique devient de plus en plus compliqué et sa présence sur un large étendu géographique est de plus en plus ressentie comme une contrainte qu'il faut étudier et la prendre en compte.

La planification, la conception et l'opération d'un réseau électrique exigent donc une analyse élaborée, continue et compréhensive des informations sur le système actuel afin de s'assurer du fonctionnement sécuritaire de l'équipement connecté et ou de la validité d'une alternative d'expansion. Les sommes investies étant élevées, il s'agissait la plupart du temps de formuler des modèles à caractère économique.

La fonction objective généralement adoptée était le coût total d'opération du système, c'est-à-dire que le prix total de combustible nécessaire aux stations de production (générateurs) est souvent minimisé par une répartition appropriée des puissances active et

réactive générées, tout en maintenant les valeurs des tensions entre des limites inférieures et supérieures spécifiées.

Jusqu'à maintenant, plusieurs modèles mathématiques ont été développés par différents chercheurs pour la planification, l'exploitation et la gestion des réseaux électriques. Malgré l'élégance de la formulation dans certains cas et une précision exceptionnelle dans d'autres, la majorité de ces modèles ne conviennent pas à une application industrielle en temps réel. Les raisons retenues et évoquées sont principalement :

- le temps de calcul mis pour atteindre une solution optimale du problème lors de la simulation d'événements fortuits
- l'espace mémoire requis en cas d'analyse de grands réseaux
- la non stabilité de ces modèles (dépendance de la fiabilité du résultat selon le cas pratique étudié), vu qu'ils sont toujours au stade de recherche et d'étude.

Dans ce travail de recherche, nous présentons une formulation mathématique non linéaire de la répartition optimale de la puissance active pour le contrôle du flux d'énergie dans un réseau électrique et sa solution par la programmation non linéaire (un logiciel regroupant 5 non linéaires). Le principe repose sur les propriétés de découplage des paramètres caractéristiques d'un système de distribution d'énergie électrique en deux modèles distincts:

- puissance active (P) et angle de phase, (BUT et GHADERPANAHI, 1982);
- puissance réactive (Q) et amplitude de la tension (V).

La formulation mathématique de cette fonction objective et celle des relations de contraintes de puissance conduisent à des équations non linéaires. Ainsi, l'approche de ce modèle est basée sur la programmation non linéaire et le principe du problème pénalisé.

Les contraintes incluses tiennent compte de la physique du réseau et sont introduites par l'architecture du réseau électrique, les capacités de production des sources ou génératrices de puissance, ainsi que les consommations de puissance demandées.

## **TRAVAUX ANTERIEURS ET ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE**

Depuis le début des années 1960, l'industrie de l'énergie électrique est devenue un usager potentiel de l'ordinateur pour son application en temps réel dans l'opération et, l'exploitation des réseaux électriques. Grâce à cet instrument privilégié et efficace, plusieurs travaux ont été réalisés. Parmi eux, on situe trois grandes catégories:

- l'écoulement statique des charges, qui consiste à évaluer les paramètres de fonctionnement statiques d'un réseau électrique en régime permanent;
- la répartition économique dont l'objectif général est de minimiser le coût global d'opération du système par une allocation des puissances active et réactive générées;
- l'écoulement optimal des charges qui, dépendamment de la formulation du problème, peut avoir une fin de contrôle ou un caractère économique. La structure générale est la résolution des équations d'écoulement des charges et d'autres équations de contraintes spécifiques pour minimiser une fonction objective déterminée.

Ainsi, l'écoulement des charges ou de puissances qui est explicitement la solution d'une condition d'opération d'un système de transmission d'énergie électrique est aussi la plus répandue. La formulation de base développée à partir d'une matrice des admittances de noeud du système a été résolue par la méthode de Newton-Raphson. Compte tenu de la nature de ces équations, cette approche simplifiée était justifiée. Plus tard, différentes méthodes de solutions numérique telle l'élimination de Gauss, de Gauss-Seidel, etc., élaborées à l'aide d'une matrice d'impédance de noeud ou de boucle furent mises en application. Les détails de ces développements sont connus et bien expliqués dans la littérature.

Certains auteurs se sont intéressés à la solution du problème en cas de contingences tout en s'inspirant de l'idée de base. Quant aux problèmes de l'écoulement optimal des charges et de la répartition économique, ils ont suscité beaucoup d'intérêts. Depuis le développement des équations de coordination et de la formulation du problème, sujet à des contraintes d'égalité et d'inégalité, un grand nombre de modèles ont été élaborés. Différentes méthodes de solutions ont été essayées. Leur procédure détermine premièrement le dispatching économique de la puissance active par les multiplicateurs de Lagrange et procède à l'optimisation de la puissance réactive générée par la méthode du gradient.

**Peschon** et autres ont présenté une méthode de minimisation des pertes actives par une sélection judicieuse des puissances réactives injectées dans le système et un ajustement approprié des prises de transformateurs.

Ils ont également introduit un algorithme pratique qui conduit chaque solution vers un point optimal réalisable.

**Hano** et autres ont présenté une méthode de calcul du profil de tension et la répartition des puissances actives dans un réseau électrique par la méthode du gradient conjugué et une minimisation des pertes actives par une technique de recherche directe.

**Dommel** et **Tinnep** ont développé une méthode d'optimisation non linéaire pour déterminer la solution de l'écoulement optimal des charges. Ils minimisent une fonction objective non linéaire des coûts de production du système ou les pertes, satisfaisant les conditions de **Kuhn-Tucker**. Une fonction de pénalité permet de conduire à l'optimalité.

Sullivan a formulé un problème d'écoulement optimal des charges axé sur l'optimisation des sources de puissances réactives générées tout en maintenant les contraintes sur les tensions de barre. Leur formulation est résolue par une méthode de programmation non linéaire.

**Savulescu** a formulé une approche permettant de déterminer la sensibilité des pertes, la transmittance de la puissance réactive et les indices de stabilité d'un réseau électrique en régime permanent. Se basant sur ces indices, il emploie une procédure efficace pour atteindre les conditions optimales d'opération exigées pour le système.

La plupart des auteurs mentionnés antérieurement ont résolu le problème de l'écoulement optimal des charges par une méthode numérique de solution non linéaire telle que la technique du gradient et ses variantes. Cependant dans la littérature, d'autres types de formulations ont été introduits.

Le modèle du présent travail introduit des algorithmes de la répartition optimale de la puissance active, par la programmation non linéaire, pour minimiser le coût du combustible. Il est basé sur les méthodes de **Davidon-Fletcher-Powell**, de **Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno**, de **Broyden**, de **Pearson** et des **moindres carrés**.

---

**- CHAPITRE I -**  
**RESEAUX ELECTRIQUES**  
**ET**  
**ECOULEMENT DE PUISSANCE**

---

---

**CHAPITRE I : RESEAUX ELECTRIQUES ET ECOULEMENT DE PUISSANCE**

---

Le développement des réseaux électriques de transport et d'interconnexion a permis, ces dernières décennies, d'améliorer considérablement le coût et la sécurité de la fourniture d'énergie électrique. Ces réseaux procurent en effet des possibilités de secours mutuel qui permettent de pallier l'effacement d'un groupe de production, améliorant ainsi la continuité du service rendu à la clientèle. La prise en considération des possibilités de secours mutuel dans la planification des installations de production permet par ailleurs de réduire la puissance globale à prévoir, et par conséquent les coûts d'investissement. Enfin, une gestion optimale des flux de puissance transmis par les réseaux permet d'utiliser en priorité à chaque instant les installations de production de plus faible coût marginal, et de minimiser ainsi les coûts de fonctionnement du système, en plus de la structure de réseau de transport qui joue un rôle très important pour minimiser le coût globale de la construction du système d'énergie électrique, en parle ici de la structure optimale de réseau de transport qui garantira la liaison entre les centrales de production et les consommateurs.

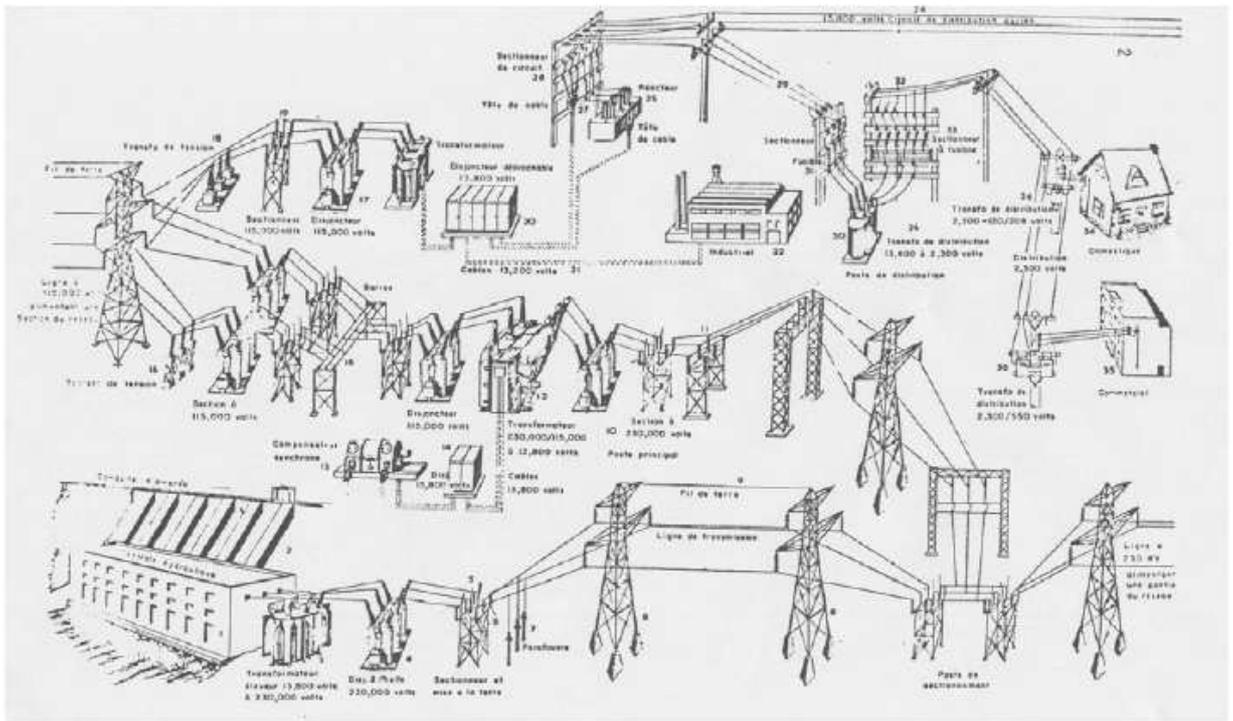
Ces avantages vitaux n'ont jusqu'à présent pu être acquis qu'au prix d'un fort impact visuel des liaisons constituant les réseaux de transport. En effet, la seule solution techniquement efficace et économiquement acceptable pour les liaisons à grande distance était la ligne aérienne. Seuls des parcours de relativement courte longueur, appartenant aux réseaux dits de répartition ou de distribution, ont permis l'utilisation de liaisons souterraines.

Les populations situées en bordure des couloirs de lignes aériennes en projet acceptent de plus en plus difficilement de se voir imposer une perturbation de leur cadre de vie. Bien évidemment, cette sensibilité accrue se manifeste de façon plus vive dans les pays où les réseaux sont les plus développés. Or, malgré des taux de croissance plus modestes que par le passé et une moindre intensité énergétique de leur développement économique, ces pays présentent encore des besoins significatifs en matière de nouveaux équipements de transport électrique.

### I.1. Introduction [31,32]

Les réseaux de transport de la nature (réseau sanguin, rivières) ou humains (réseau électrique, canalisations...) sont efficaces ou du moins cherchent à l'être d'un point de vue énergétique. Il est donc naturel d'essayer de formuler un problème d'optimisation dont ces structures seraient des optima ou sous-optima. Un point commun à ce type de réseaux est de transporter une *masse* d'une source vers un but que l'on peut voir comme des mesures mu- et mu+. On va donc s'intéresser au problème de transporter mu- vers mu+ à faible coût. Le choix du coût est le coeur du modèle.

Pour les réseaux électriques, on peut parler de réseau de transport et d'interconnexion à très haute tension (THT) qui assure la liaison entre les centres de production et les grandes zones de consommation. Ils permettent d'acheminer, là où elle est consommée, l'énergie la moins chère possible à un instant donné. Par ailleurs, le maillage du réseau contribue à la sécurité d'alimentation et permet de faire face, dans des conditions économiques satisfaisantes, aux aléas locaux ou conjoncturels qui peuvent affecter l'exploitation (indisponibilité d'ouvrage, aléas de consommation, incidents...).

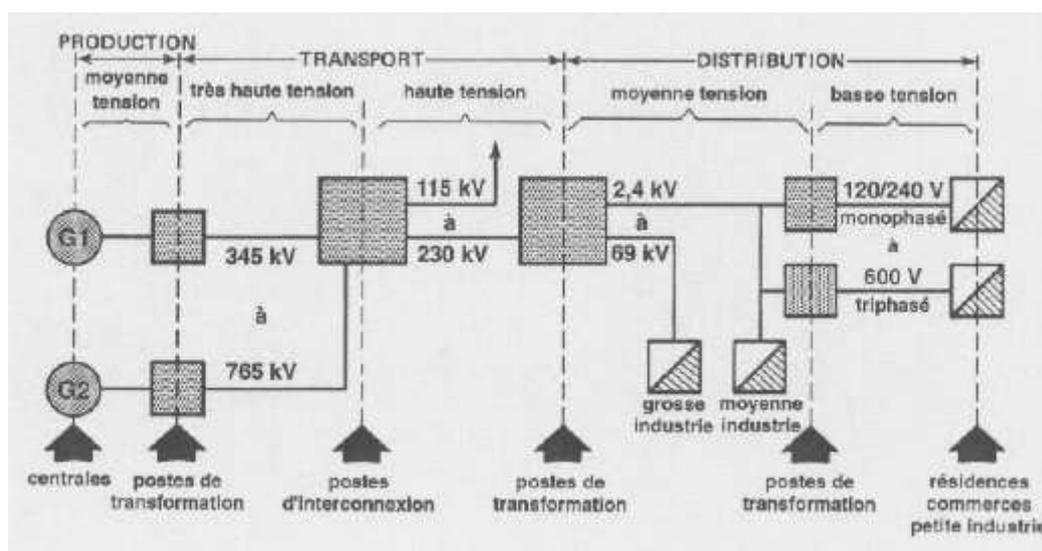


*Vue d'ensemble des composants d'un réseau électrique*

Pour mettre en œuvre le service public de l'électricité et dans le respect de l'environnement, de nouvelles infrastructures de transport seront nécessaires afin de répondre aux impératifs de l'activité économique et sociale.

## I.2. La reconfiguration de réseau de transport [30]

La planification des réseaux électriques est une partie importante de la réserve de puissance. La tâche primordiale est la détermination optimale de la reconfiguration d'un réseau électrique avec la considération de l'évolution de la charge électrique. La recherche de la configuration des réseaux électriques est de corriger le schéma de planification de la réserve de puissance. La base principale de la reconfiguration des réseaux est une reconstitution d'un réseau dont le coût conventionnel d'investissement soit minimal. Généralement la reconfiguration des réseaux électriques est étudiée en deux stades :



*Organisation d'un réseau électrique*

### I.2.1. La formation du schéma et son évaluation :

Cela revient à déterminer les différentes alternatives avec des coûts conventionnel minimaux en respectant le transit de puissance et l'aptitude à la capacité d'énergie soumise au transit entre le dépôt et le puits. Jusqu'à présent les planificateurs utilisent leur expérience pour déterminer l'extension des lignes de réserve de la nouvelle configuration.

### I.2.2. L'évaluation du schéma de formation :

La tâche revient à trouver une configuration avec un surcoût, tout en utilisant les contraintes de la fiabilité, l'écoulement de puissance, l'analyse de la stabilité et le calcul des courts-circuits afin de décider sur un schéma final.

## I.3. Problème d'optimisation de la topologie des réseaux [30]

L'analyse de la structure des réseaux électriques et les problèmes des configurations optimales est l'un des soucis majeurs de certains chercheurs, la relation qui existe entre les éléments d'un système Serveur - Abonnés ou bien la connexion du système principal, sa

conduite en temps réel et la garantie de la continuité de service repose sur des théories fondamentales. Dans cette étude nous allons affronter les problèmes d'optimisation en utilisant la théorie de recherche opérationnelle. Pour structurer une configuration optimale parmi plusieurs configurations, on doit représenter la structure par un graphe, ensuite on la modélise par une matrice.

La structure d'un réseau touche profondément le problème de transit de puissance (transport de puissance, la fiabilité du système, la perte d'énergie et de tension, la stabilité du réseau et essentiellement l'investissement de la réalisation du projet). Ces derniers restent des problèmes fondamentaux qu'on doit résoudre. Le compromis entre ces divers indices économiques, d'échange entre la station (Dépôts ou centrales) et la réception (Puits) restent des questions concernant le plan d'exploitation et de la planification à affronter et à résoudre.

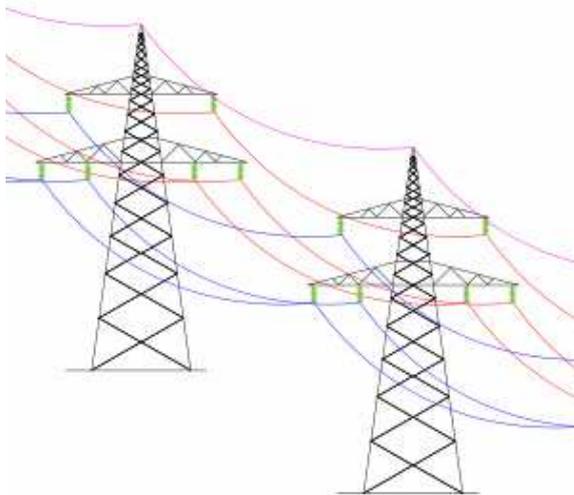
**Définition :**

Une Structure représente l'ensemble de tous les éléments constituant un réseau indépendamment de leur état (en service / hors service).

Une configuration ou topologie représente un état d'un réseau dans laquelle chaque élément à un état défini : en service ou en hors service.

**I.4. Comparaison entre les lignes aériennes et les câbles [31]**

Les lignes aériennes reviennent x fois meilleur marché que les câbles. En cas de très haute tension, des problèmes se posent pour les longues étendues de câbles. En revanche, les câbles sont mieux protégés contre les avaries extérieures (foudre, tempête) que les lignes aériennes. Les défaillances sont plus rapidement décelables sur les lignes aériennes. Les réparations sont simples à mener pour les lignes aériennes; pour les câbles au contraire, elles exigent de gros travaux. Les lignes aériennes peuvent toutefois déranger dans le paysage.



*Ces pylônes supportent 2 ternes : le rouge et le bleu. Chaque terne est constitué de 3 phases. Chaque phase est supportée par un isolateur. Plus un câble de garde.*

### **I.4.1. Ligne aérienne**

#### **I.4.1.1. Avantages :**

- ⇒ Défaillances décelables ;
- ⇒ Problème plus rapidement résolu.

#### **I.4.1.2. Inconvénients :**

- ⇒ pannes plus fréquentes (dépend du temps) ;
- ⇒ répercussion sur le paysage.

### **I.4.2. Câble**

#### **I.4.2.1. Avantages :**

- ⇒ souterrain ;
- ⇒ espace requis réduit ;
- ⇒ meilleure acceptation auprès de la population.
- ⇒

#### **I.4.2.1. Inconvénients :**

- ⇒ travaux de réparation coûteux (sous-terre);
- ⇒ le renouvellement des câbles revient plus cher que pour les lignes aériennes.

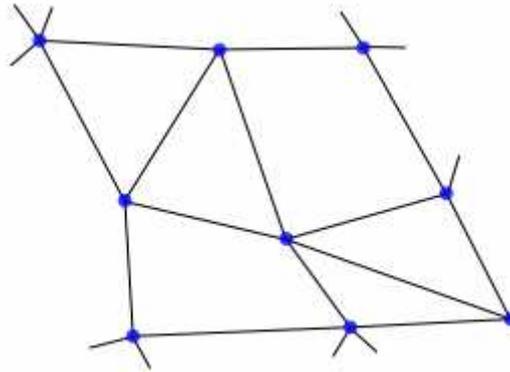
### **I.5. Structure des réseaux [31]**

Le concept de réseau englobe la totalité des installations, notamment les lignes aériennes, les câbles, les transformateurs et les appareils avec leurs moyens de contrôle et de sécurité, les interrupteurs, etc., nécessaires au transport et à la distribution de l'énergie électrique.

Les réseaux électriques peuvent être organisés selon plusieurs types de structures exposées ci-dessous :

### I.5.1. Réseau maillé ou connecté

Lorsque des lignes en boucle sont regroupées pour relier des points très éloignés les uns des autres, elles forment un réseau maillé. Ce type de réseau offre une très grande fiabilité d'approvisionnement car chaque tronçon de ligne peut être alimenté via différentes voies. Même une défaillance sur plusieurs tronçons n'engendre pas une grosse perturbation.

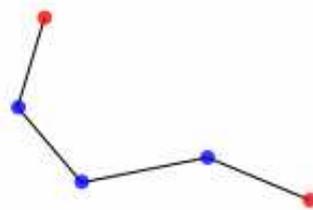


*structure maillée* : les postes électriques sont reliés entre eux par de nombreuses lignes électriques, apportant une grande sécurité d'alimentation.

Les réseaux maillés sont surtout construits et exploités là où la sécurité d'approvisionnement d'un grand nombre de clients peut être compromise par une perturbation, comme c'est particulièrement le cas pour les réseaux de transport et de distribution haute tension

### I.5.2. Réseau en boucle

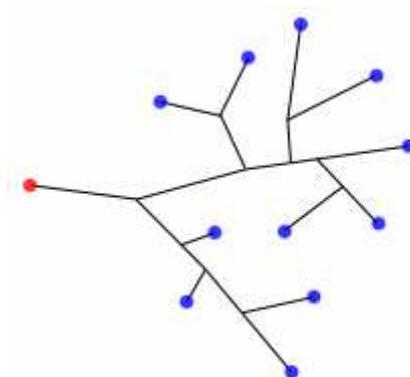
L'assemblage en boucle des lignes permet de mettre hors circuit une partie de la ligne défectueuse grâce à ses points de séparation. L'alimentation électrique est interrompue uniquement dans cette partie jusqu'à la réparation de la panne; le reste du réseau peut continuer à fonctionner.



*Structure radiale ou bouclée* : (Les postes rouges représentent les apports d'énergie) : la sécurité d'alimentation, bien qu'inférieure à celle de la structure maillée, reste élevée.

### I.5.3. Réseau radial ou en étoile

Il représente le réseau sous sa forme la plus simple. Les lignes partent d'un point central, par exemple une station de transformation locale, et rayonnent depuis celui-ci. Si une perturbation se produit sur ce type de réseau, l'alimentation électrique de tous les clients rattachés à ce rayon défectueux est interrompue, jusqu'à ce que la panne soit réparée. La panne d'une station de transformation peut paralyser tout un quartier.



*Structure étoile (les postes rouges représentent les apports d'énergie) : la sécurité d'alimentation est faible puisqu'un défaut sur la ligne ou sur le poste rouge coupe l'ensemble des clients en aval.*

### I.6. L'effet de réseau de transport sur la qualité du service [33]

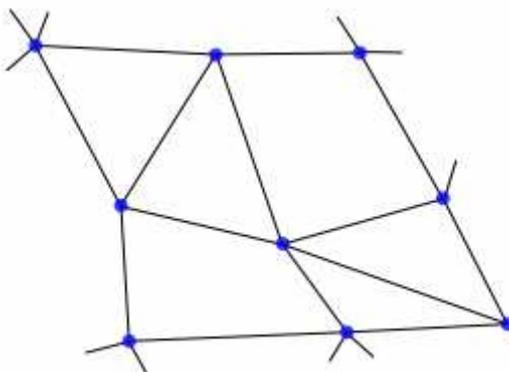
Les réseaux THT contribuent donc de façon déterminante au maintien de l'équilibre entre la demande et l'offre, ainsi qu'à la sécurité d'alimentation et à l'économie de l'exploitation.

Par ailleurs, la qualité du service est également un souci majeur de l'exploitant. Sur le plan pratique, cette qualité nécessite :

- ⇒ de maintenir les caractéristiques du produit (tension, fréquence) dans les limites très précises du cahier des charges ;
- ⇒ de limiter, autant que faire se peut, les interruptions de service. Les réseaux THT jouent aussi un rôle très important pour respecter ces contraintes car :
- ⇒ les références de tension qui vont conditionner l'ensemble du plan de tension dans le réseau sont fixées, pour l'essentiel, par les groupes de production raccordés aux réseaux THT ;
- ⇒ la fréquence est, de même, fixée par les groupes de production qui doivent rester synchrones en régime permanent ;
- ⇒ la sécurité d'alimentation des grands centres de consommation dépend très fortement de la structure des réseaux de transport.

### I.7. Le rôle du réseau de grand transport [141,144]

La fonction de base du réseau de grand transport est d'abord de relier les centrales de production aux centres de consommation d'électricité. Mais, au-delà de cette évidence, pour comprendre la structure et les contraintes d'exploitation de ce réseau, il importe de bien appréhender les principales lignes directrices de son développement et de son organisation, que nous allons rappeler très brièvement.



*Les réseaux de transport sont basés sur une structure de réseau maillée*

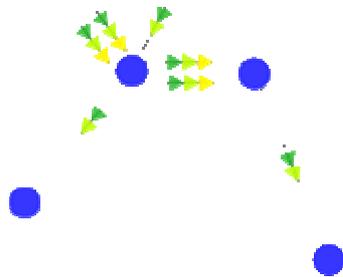
Le réseau de grand transport est né de la localisation de ressources énergétiques (souvent l'hydroélectricité) loin des zones consommatrices. Pour franchir la distance correspondante, la technique du transport par courant alternatif à très haute tension s'est rapidement imposée. En Europe (hormis l'ex-URSS), les réseaux à 400 kV à 50 Hz ont été adoptés après la Seconde Guerre mondiale comme le meilleur compromis entre le coût d'investissement, le coût d'exploitation (notamment la réduction des pertes Joule) et le service rendu. Leur rôle s'est vite accru avec l'effet de taille dans la production, qui a rendu plus économique la construction de centrales de puissance toujours croissante, alors que, bien sûr, la consommation restait diffuse. Mais l'interconnexion s'est surtout développée rapidement pour contrebalancer un inconvénient bien connu de l'électricité.

À chaque instant, l'énergie électrique produite dans un système interconnecté est égale à l'énergie consommée. En effet, malgré les progrès envisageables des technologies de stockage (par exemple dans des matériaux supraconducteurs), les conditions économiques de mise en oeuvre d'un stockage massif directement sous forme électromagnétique ne sont pas satisfaisantes, et ce sans doute encore pour plusieurs décennies.

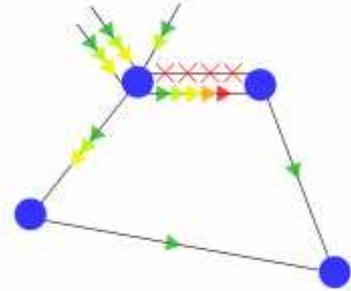
Le développement du réseau de transport a permis de contourner la difficulté de produire localement exactement la puissance consommée à chaque instant dans chaque région.

Sous l'angle économique, le réseau de grand transport permet, à niveau identique de sécurité d'alimentation, de diminuer largement les investissements dans des centrales de production.

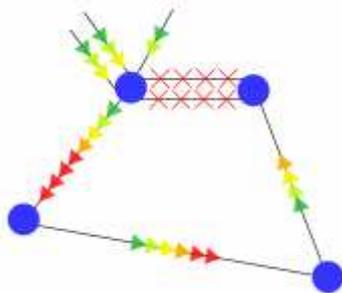
**Illustration du report de charge :**



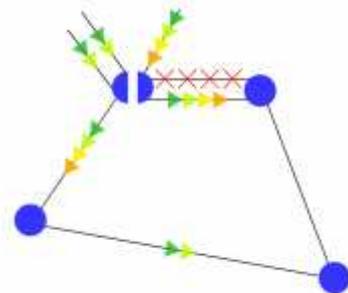
*A) Etat normal d'une partie de réseau électrique*



*B) Etat du réseau immédiatement après l'incident : l'énergie s'est répartie différemment*



*C1) Si aucune action n'est menée, l'incident s'aggrave et va conduire à la mise hors tension de la zone*



*C2) En cas de surcharge, les exploitants du réseau peuvent modifier la topologie afin d'optimiser la répartition de l'énergie entre les lignes*

Le réseau permet aussi de bénéficier des différences de coûts de production (ou de prix offerts sur un marché ouvert) entre des équipements distants, conduisant à une réduction globale des coûts d'exploitation. Ces différences de prix, selon leur caractère conjoncturel ou structurel, donnent lieu à des transports d'électricité dits respectivement « systématiques » et « de compensation ».

**I.7.1. Le transport systématique**

Il est pratiqué lorsque des ressources énergétiques massives et économiques sont situées loin de leur clientèle. Ce peut être par exemple le cas de l'hydroélectricité (Baie James au Canada), du nucléaire (unités de forte puissance dont la localisation est dictée par des contraintes de source froide) ou du gaz (production électrique dans le nord de l'Angleterre, près des gisements, avec une forte consommation au sud du pays).

### **1.7.2. Le transport de compensation :**

Il relève de la compensation statistique des variations tant de la consommation que de la capacité de production. Il peut être prévisible et aisément anticipé : c'est le cas de l'effet des décalages entre heures de pointes entre régions ou pays (par exemple le décalage horaire entre grands centres de consommation de l'interconnexion de l'Est des États-Unis). C'est aussi le cas lors de la gestion coordonnée de centrales thermiques et hydrauliques appartenant à un même producteur, tirant parti de la complémentarité de ses moyens de production. Le transport de compensation peut aussi devoir être mis en oeuvre, avec un préavis très limité, dans le cas de la panne d'une grosse unité de production.

Ce type d'événement fait toutefois partie des anticipations habituelles, nécessaire à la bonne conduite d'un système électrique.

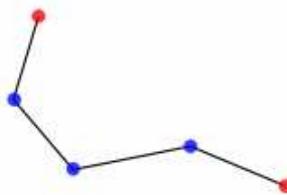
Les avantages d'un puissant réseau de grand transport et d'interconnexion ont conduit en Europe (comme dans la plupart des régions du monde) à deux tendances majeures, nécessaires à l'expansion des échanges transfrontaliers d'électricité et du commerce international :

- ⇒ L'extension de la zone de synchronisme que constituent aujourd'hui les pays d'Europe de l'Ouest ;
- ⇒ L'interconnexion entre zones synchrones grâce à des liaisons à courant continu.

La transformation actuelle du réseau de grand transport d'outil d'optimisation « national » à moyen terme en un sous ensemble d'un immense réseau de grand transport et d'interconnexion instrument de liquidité d'un marché européen en plein essor conduit à l'exploiter dans des conditions très différentes de celles qui ont présidé à sa conception. Cette évolution marque d'ores et déjà les pratiques de conduite des systèmes électriques.

### **I.8. Le rôle des réseaux de répartition [32]**

Le rôle de plaque tournante du réseau de grand transport doit être complété par d'autres réseaux qui vont acheminer l'énergie à proximité immédiate des zones de consommation diffuse : il s'agit des réseaux de répartition, qui assurent le relais jusqu'aux « capillaires » que sont les réseaux de distribution à 20 kV et à 400 V. En Europe, le grand transport est le domaine du réseau à 400 kV, plus certaines liaisons à 225 kV qui jouent un rôle complexe, relevant, selon les ouvrages ou les schémas d'exploitation, du grand transport ou de la répartition.



*Entre les 2 postes rouges, la structure est bouclée. Les réseaux de répartition ont souvent cette structure dans les régions faiblement consommatrices*

En complément du réseau à 225 kV, il existe en général un niveau de tension intermédiaire pour des réseaux de répartition maillés alimentant les « postes sources » où se trouvent les transformateurs vers les réseaux radiaux de distribution. En France, ce niveau est constitué des réseaux à 90 kV et 63 kV (plus quelques ouvrages à 150 kV). En effet, les réseaux de répartition sont en général exploités « en poche », c'est-à-dire que les zones régionales qu'ils desservent ne sont directement reliées que par les niveaux de tension supérieurs. Il n'y a donc pas de raison d'adopter uniformément un même choix technique, et le poids des investissements passés est tel qu'il maintient une diversité parfois fort ancienne.

Outre la desserte régionale, les réseaux de répartition ont un rôle d'évacuation de la puissance produite par de petites centrales (en général 250 MW et moins). Ce rôle est très important dans des régions comme le Massif Central où une production hydroélectrique abondante provient de nombreuses petites usines réparties le long des vallées.

Pour conclure sur les réseaux de répartition, il faut souligner que, s'ils ne conditionnent pas directement la robustesse des systèmes électriques, c'est-à-dire leur sûreté, ils jouent un rôle déterminant quant à la qualité de l'électricité livrée au consommateur final. Leur conception, comme leur exploitation et leur conduite, se traduisent très directement en nombres de coupures longues ou brèves, nombres de creux de tension, etc., subis à la livraison en bout de chaîne.

### **I.9 Les grands enjeux de la conduite des systèmes électriques [32]**

Comme on vient de le voir à travers les grands principes, les systèmes électriques sont des machines « distribuées » d'une très grande complexité. Leur énorme taille a conduit à en décentraliser la conduite à plusieurs « pilotes » simultanés, alors même que toute décision est soumise à tout un jeu d'interdépendances temporelles et spatiales.

#### **Exemples :**

La décision d'augmenter la production hydroélectrique sur un lac de montagne va, quelques heures plus tard, affecter la puissance produite par une unité « au fil de l'eau » sur le cours d'eau aval (parfois dans un autre pays !) ; le découplage d'une centrale nucléaire

espagnole va être instantanément perceptible sur la fréquence mesurée au dispatching de Varsovie.

Cette complexité toujours croissante est le défi que doivent relever les exploitants des systèmes électriques pour parvenir à tenir leurs trois objectifs fondamentaux.

- ⇒ Favoriser la performance économique, en offrant à tous les acteurs la possibilité de réaliser, dans la mesure du possible, les transactions qu'ils souhaitent grâce à une circulation aisée et transparente entre les producteurs d'électricité et leurs clients (dans l'organisation qui avait cours jusqu'à ces dernières années, favoriser la performance économique s'obtenait par l'optimisation directe de la production des centrales destinées à satisfaire la consommation desservie dans le cadre d'un monopole de fourniture).
- ⇒ Maintenir la sûreté de fonctionnement du système, malgré les nombreux aléas qui affectent réseaux, centrales et consommation (par exemple des courts-circuits dus à la foudre, des défaillances d'équipements obligeant à l'arrêt immédiat de groupes de production, etc.). De tels problèmes ont déjà eu lieu dans la plupart des pays industrialisés (par exemple, les nombreux incidents aux États-Unis entre 1968 et 1996, la mise hors tension de vastes zones en France en 1978 et 1987, en Suède en 1983, au Japon en 1987, en Italie en 1994, au Brésil en 1999, le black out en Algérie en 2004 etc.). Ces incidents de grande ampleur causent des dégâts économiques considérables et sont devenus inacceptables par nos sociétés modernes.
- ⇒ Garantir la qualité de fourniture au point de livraison, conformément aux engagements contractuels conclus entre le transporteur d'électricité et les clients finals ou exigés par le cadre réglementaire.

Enfin, il va de soi qu'il est nécessaire de protéger les systèmes électriques qui peuvent être affectés par de nombreux types d'incidents. Il convient de distinguer la protection des ouvrages du réseau proprement dit (lignes...) et celle du système production-transport.

La protection du système production-transport est essentielle, car certains incidents (pertes de ligne en cascade, pertes brutales de moyens de production importants...) peuvent induire des conséquences catastrophiques (effondrement du système électrique).

### I.10 Les isolateurs [35]

Le rôle des isolateurs des lignes aériennes est de retenir mécaniquement les conducteurs aux structures qui les supportent et d'assurer l'isolement électrique entre ces deux éléments.

Pendant plusieurs dizaines d'années leurs qualités électriques et mécaniques ne devront donc être détruites par aucune des contraintes de toute nature qu'ils subiront.

De plus, ils devront faciliter tout travail qui pourrait être effectué sur la ligne, même maintenue sous tension électrique, et ne nuire à la réception des signaux électromagnétiques, radio, télévision et autres, ni, si possible, à l'esthétique.

### I.11. Présentation de quelques systèmes FACTS

Les progrès continus dans le domaine de l'électronique de puissance, depuis les années 1960, permettent l'utilisation de composants semi-conducteurs pour les systèmes Flexible AC Transmission Systems (FACTS). L'utilisation de ces composants autorise des vitesses de commande élevées et conduit à des coûts de maintenance nettement moins importants. Les systèmes FACTS les plus communs (utilisant des capacités et des inductances) sont:

- les systèmes shunt de type compensation d'énergie réactive v grâce à une injection de puissance réactive, la tension est maintenue au noeud de connexion du compensateur. C'est dans cette famille qu'on retrouve les Static Var Compensators (SVC de type capacité (TSC), inductance (TCR) ou hybride) (figure 1.12),

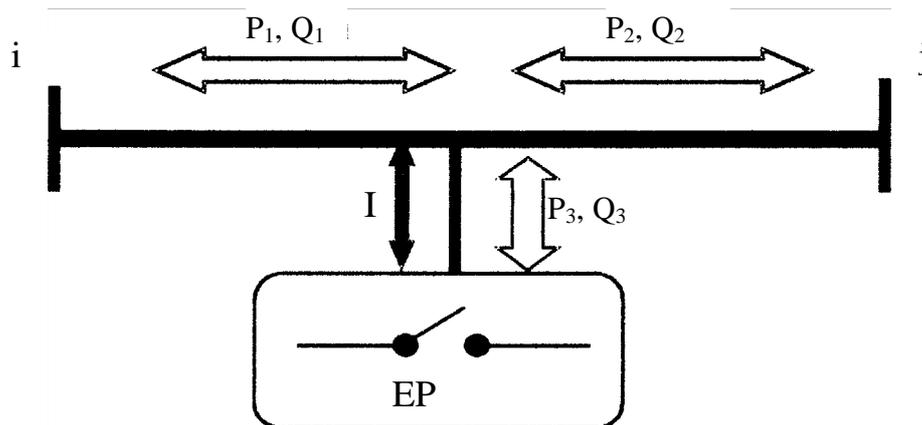


Figure 1.12: Synoptique d'un FACTS shunt

- les systèmes de compensateurs série : la puissance transmissible des lignes est modifiée par l'ajout d'une tension série, ceci a pour effet de modifier l'impédance de la ligne et donc les transits de puissance (figure 1.13),

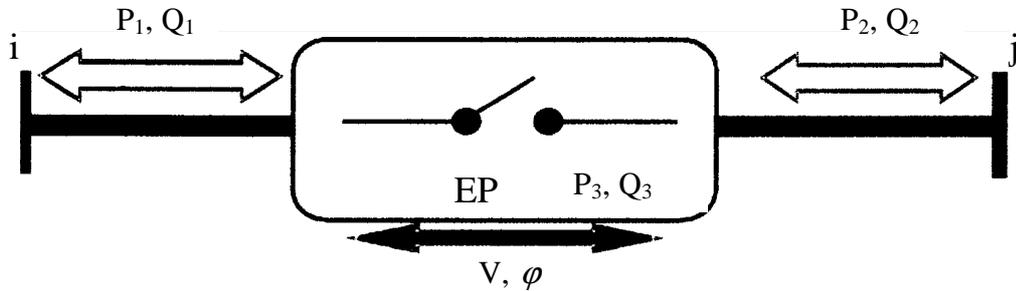


Figure 1.13: Synoptique d'un FACTS série

- les systèmes hybrides de type Unified Power Factor Compensator UPFC : il s'agit de la combinaison des deux types de FACTS précédemment cités. Ces deux FACTS peuvent s'échanger de la puissance ( $P_5, Q_5$ ) et sont donc capables de modifier l'impédance de la ligne au niveau du FACTS série et/ou une injection/prélèvement de puissance ( $P_3, Q_3$ ) au niveau du FACTS shunt. Le système a plus de variables de réglage et est donc plus « flexible » dans sa commande (figure 1.14).

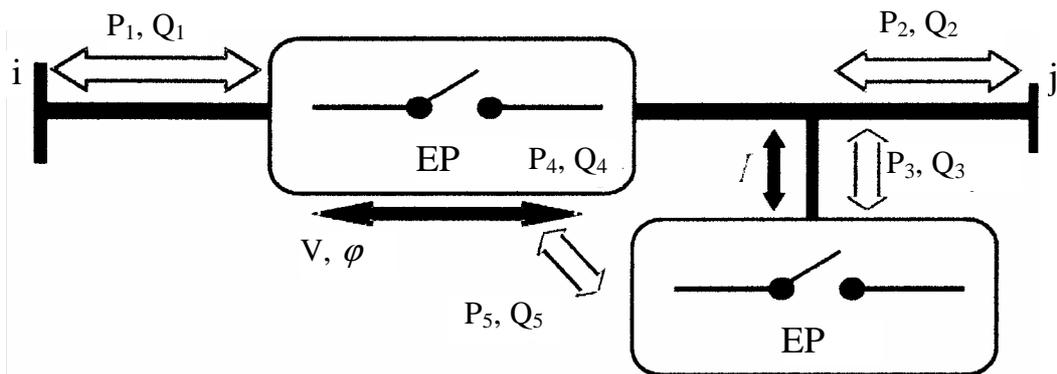


Figure 1.14: Synoptique d'un FACTS de type UPFC

### I.12. Les équations de l'écoulement de puissance

Dans le cas général, pour déterminer les équations de l'écoulement de puissance, on considère que les puissances au jeu de barres  $i$  sont équilibrées, donc le bilan des puissances électriques à un jeu de barres  $i$  d'un réseau électrique de  $n$  jeux de barres est la différence entre la puissance générée  $S_{Gi}$  et la puissance demandée  $S_{Di}$ ; au niveau du même jeu de barres.

$$S_i = S_{Gi} - S_{Di} = P_{Gi} - P_{Di} + j(Q_{Gi} - Q_{Di}) \quad (1.2)$$

Les points de connexion des branches des réseaux sont codés par des numéros désignant chaque jeu de barres. Ces nombres spécifient les arrivées des lignes de transmission et des transformateurs. Les numéros sont utilisés pour identifier les types de jeux de barres et l'emplacement des éléments du réseau (condensateurs, inductances shunts et impédances).

Les lignes de transmission connectent le jeu de barres  $i$  aux autres jeux de barres  $k$  dans le réseau électrique. Un jeu de barres peut être connecté au maximum à  $(n-1)$  jeux de barres. On peut représenter chacune de ces lignes par un schéma équivalent avec une admittance série  $Y_{Sik}$  et une admittance parallèle  $Y_{Pik}$  «Si une ligne n'existe pas l'admittance sera égal à zéro (figure 1.15).

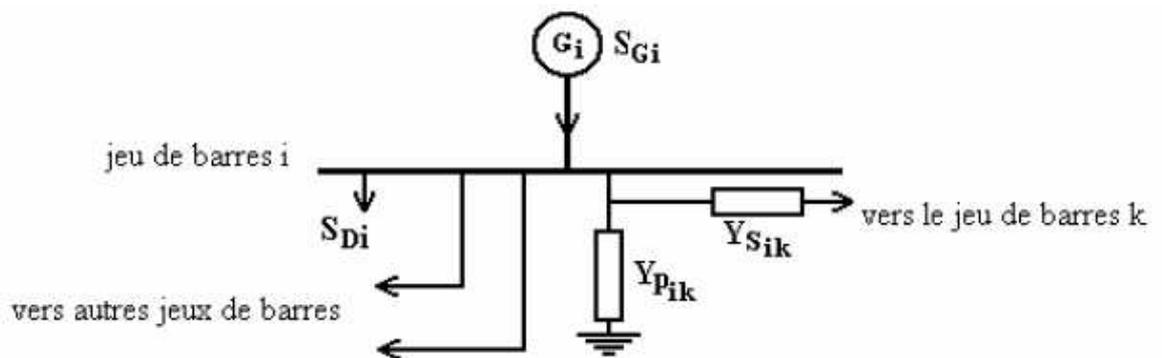


Figure 1.15 : jeu de barres quelconque avec génération, charge et lignes de transmission

La construction du modèle mathématique, par lequel on peut prédire la forme de l'écoulement de puissance, est essentielle pour la compréhension du mécanisme de l'écoulement de puissance. Dans la formulation des équations de l'écoulement de puissance l'une des deux matrices (admittance ou impédance) est nécessaire.

La puissance apparente  $S_i$  injectée au jeu de barres  $i$  est donnée par l'équation  $S_i = V_i I_i^*$  où  $I_i$  est le courant qui entre dans le jeu de barres  $i$ . Ce courant est composé de deux composantes,

une composante  $Y_p V_i$  qui s'écoule à travers l'admittance shunt, et une composante  $(V_i - V_k)Y_s$  qui s'écoule à travers l'admittance série de la ligne équivalente du réseau. D'après la loi de Kirchhoff appliquée à un jeu de barres, pour une seule phase, nous avons l'équation du courant:

$$I_i = \frac{S_i^*}{V_i} = V_i \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n Y_{pik} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n Y_{Sik} (V_i + V_k) = V_i \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n (Y_{pik} + Y_{Sik}) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n (-Y_{Sik}) V_k \quad i = 1, \dots, n \quad (1.3)$$

On peut écrire l'équation (1.3) sous la forme suivante :

$$I_i = \frac{S_i^*}{V_i} = Y_{i1} V_1 + Y_{i2} V_2 + \dots + Y_{ii} V_i + \dots + Y_{in} V_n \quad i = 1, \dots, n \quad (1.4)$$

$$\text{Où } Y_{ii} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n (Y_{pik} + Y_{Sik}) \quad \text{et} \quad Y_{ik} = Y_{ki} = -Y_{Sik}$$

Du fait que les puissances sont connues et les courants sont inconnus, donc les équations prendront des formes non linéaires :

$$S_i^* = P_i - jQ_i = V_i^* \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n Y_{ij} V_j \quad i = 1, \dots, n \quad (1.5)$$

Séparons la partie réelle et imaginaire de l'équation (1.5) on aura les équations (1.6) et (1.7) qui expriment l'équilibre des puissances actives et réactives au jeu de barres  $i$  :

$$P_i = \sum_{j=1}^n |V_i| |V_j| (g_{ij} \cos \theta_{ij} + \sin \theta_{ij}) = f_{ip} \quad i = 1, \dots, n \quad (1.6)$$

$$Q_i = \sum_{j=1}^n |V_i| |V_j| (g_{ij} \sin \theta_{ij} - \cos \theta_{ij}) = f_{iq} \quad i = 1, \dots, n \quad (1.7)$$

### I.12.1. Equations de l'écoulement de puissances dans les lignes

La détermination des valeurs des puissances réparties dans les lignes de transport est indispensable afin de localiser les lignes électriques surchargées, de calculer la valeur de pertes de puissance et de déterminer les contraintes qui sont forcées.

Le courant de la branche entre les deux jeux de barres  $i$  et  $k$ , qui a le sens positif de  $i$  vers  $k$  est donné par :

$$I_{ik} = Y_{ik} (V_i - V_k) + V_i Y_p \quad (1.8)$$

avec  $Y_{ik}$  : l'admittance de la ligne entre les deux jeux de barres  $i$  et  $k$

$Y_p$  : l'admittance shunt au jeu de barres  $i$

$V_i Y_p$  : la contribution shunt du courant au jeu de barres  $i$ .

$$P_{ik} - jQ_{ik} = V_i^* I_{ik}$$

$$P_{ik} - jQ_{ik} = V_i^* (V_i - V_k) Y_{ik} + V_i^* V_i Y_p \quad (1.9)$$

$$P_{ki} - jQ_{ki} = V_k^* (V_k - V_i) Y_{ik} + V_k^* V_k Y_p \quad (1.10)$$

La valeur des pertes de puissance dans la ligne entre les deux jeux de barres  $i$  et  $k$  est la somme algébrique de la répartition des puissances déterminées à partir des relations (1.9) et (1.10).

### I.12.2. Quelques observations sur les équations de l'écoulement de puissance

Les observations concernant les équations du système (1.6) et (1.7) sont :

1. Les équations sont algébriques car elles représentent un système qui travaille en régime permanent.
2. Les équations sont non linéaires, donc il est très difficile d'avoir des solutions analytiques, mais on peut obtenir facilement une solution numérique.
3. L'équilibre des puissances actives donne :

$$\sum_{i=1}^n P_{Gi} = \sum_{i=1}^n P_{Di} + \sum_{i=1}^n P_{Li} \quad (1.11)$$

Où  $P_L$  : les pertes de puissances actives

4. De même l'équilibre de la puissance réactive donne :

$$\sum_{i=1}^n Q_{Gi} = \sum_{i=1}^n Q_{Di} + \sum_{i=1}^n Q_{Li} \quad (1.12)$$

Où  $Q_L$  : les pertes de puissances réactives

5.  $P_{Li}$ ; et  $Q_{Li}$ , sont des équations en fonction des tensions
6. Dans les équations du système (1.6) et (1.7) les angles de phase  $\theta_1, \theta_2$  apparaissent sous forme de différence  $\theta_i - \theta_j$  et non  $\theta_i$  et  $\theta_j$  séparément.
7. D'après les équations du système (1.6) et (1.7) à chaque jeu de barres  $i$  nous avons à considérer six variables :  $P_{gi}$ ,  $Q_{gi}$ ,  $P_{Di}$ ,  $Q_{Di}$ ,  $V_i$  et  $\theta_i$ . Deux de ces variables sont toujours

spécifiées,  $P_{Di}$ ,  $Q_{Di}$ . Pour résoudre les équations (1.6) et (1.7), nous devons préciser deux autres variables supplémentaires. Du point de vue mathématique, le choix est indifférent ; pourtant d'un point de vue physique nous ne pouvons spécifier que deux variables sur lesquelles nous avons un moyen d'action. Nos choix sont influencés jusqu'à un certain degré par le type de dispositifs connectés à chaque jeu de barres. Nous distinguons alors trois types de jeux de barres : jeu de barres du type P, Q ou charge qui ne comprenant pas de générateur, Jeu de barres du type P, V que comporte certainement au moins un générateur et jeu de barres du type V,  $\delta$  qui est toujours connecté un générateur considéré comme source de tension

8. Les réseaux électriques réels peuvent contenir des centaines de jeux de barres, des générateurs et des milliers des branches, donc pour un système de  $n$  jeux de barres on aura :

- $n$  variables :  $|V_i|$  (module de la tension de jeu de barres  $i$ )
- $n$  variables :  $\theta_i$  (angle de phase de la tension du jeu de barres  $i$ )
- $n$  variables :  $P_{Gi}$  (puissance active injectée au jeu de barres  $i$ )
- $n$  variables :  $Q_{Gi}$  (puissance réactive injectée au jeu de barres  $i$ )
- $n$  variables :  $P_{Di}$  (puissance active demandée au jeu de barres  $i$ )
- $n$  variables :  $Q_{Di}$  (puissance réactive demandée au jeu de barres  $i$ )

### **I.12.3. Classification des variables de l'écoulement de puissance**

Les  $(6n)$  variables de l'écoulement de puissance sont regroupées en trois vecteurs le vecteur de perturbation constitue de  $P_{Di}$  et  $Q_{Di}$  car elles ne sont pas contrôlables et dépendent seulement des consommateurs, le vecteur de contrôle constitue de la puissance active et réactive de chaque générateur en service ( $P_{Gi}$  et  $Q_{Gi}$ ) et enfin le vecteur d'état constitue des tensions des jeux de barres ( $|V_i|$  et  $\theta_i$ )

### **I.13. Algorithme de Newton Raphson appliquée aux équations de l'écoulement de puissance**

Mathématiquement, le problème de l'écoulement de puissance peut être réduit à un ensemble d'équations non linéaires où le module et l'angle des tensions aux niveaux des jeux de barres sont les variables. Dans la forme la plus compacte, le nombre d'équations vaut approximativement deux fois le nombre de jeux de barres. Les non linéarités peuvent être

approximativement classées sous une forme quadratique. La technique de N-R basée sur le calcul du gradient et de la relaxation est utilisée comme méthodes de solution pour ces systèmes d'équations.

Le problème peut être résolu en utilisant soit les coordonnées rectangulaires soit les coordonnées polaires. Il est préférable d'utiliser la forme polaire pour faire apparaître les différentes grandeurs qui caractérisent le réseau électrique.

Le développement en série de Taylor autour de  $(V^\circ, \theta^\circ)$  donne :

$$P = \begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} \Delta \theta \\ \Delta V \end{bmatrix} \quad (1.16)$$

ou  $\Delta P$ ,  $\Delta Q$ ,  $\Delta \theta$  et  $\Delta V$  : sont les vecteurs sensibilités de dimensions n des puissances actives et réactives, des modules de tensions et des angles de phase des jeux de barre respectivement.

La matrice Jacobien est :

$$J = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \quad (1.17)$$

avec:

$$J_{11} = \frac{\partial P}{\partial \theta}, \quad J_{12} = \frac{\partial P}{\partial V}, \quad J_{21} = \frac{\partial Q}{\partial \theta}, \quad J_{22} = \frac{\partial Q}{\partial V} \quad (1.18)$$

Sont des sous matrices de dimension (n x n) et elles sont déterminées par :

$$\frac{\partial P_k}{\partial \theta_k} = \sum_{L=1}^n |V_k| |V_L| (-g_{k,L} \sin \theta_{k,L} + b_{k,L} \cos \theta_{k,L}) = -Q_k - |V_k|^2 b_{k,k}$$

$$\frac{\partial P_k}{\partial \theta_L} = |V_k| |V_L| (g_{k,L} \sin \theta_{k,L} - b_{k,L} \cos \theta_{k,L})$$

$$\frac{\partial P_k}{\partial |V_k|} = \sum_{L=1}^n |V_L| (-g_{k,L} \cos \theta_{k,L} + b_{k,L} \sin \theta_{k,L}) = |V_k|^{-1} (P_k + |V_k|^2 g_{k,k})$$

$$\frac{\partial P_k}{\partial |V_L|} = |V_L| (g_{k,L} \cos \theta_{k,L} + b_{k,L} \sin \theta_{k,L})$$

$$\frac{\partial Q_k}{\partial \theta_k} = \sum_{L=1}^n |V_k| |V_L| (g_{k,L} \cos \theta_{k,L} + b_{k,L} \sin \theta_{k,L}) = P_k - |V_k|^2 g_{k,k}$$

$$\frac{\partial Q_k}{\partial \theta_L} = -|V_k| |V_L| (g_{k,L} \cos \theta_{k,L} + b_{k,L} \sin \theta_{k,L})$$

$$\frac{\partial Q_k}{\partial |V_k|} = \sum_{L=1}^n |V_k| (g_{k,L} \sin \theta_{k,L} - b_{k,L} \cos \theta_{k,L}) = V_k^{-1} (Q_k - |V_k|^2 b_{k,k})$$

$$\frac{\partial Q_k}{\partial |V_L|} = |V_k| (g_{k,L} \sin \theta_{k,L} - b_{k,L} \cos \theta_{k,L})$$

Les équations non linéaires qui expriment les puissances actives et réactives en fonction des tensions sont données sous forme matricielle comme suit :

$$\begin{bmatrix} \Delta P \\ \dots \\ \Delta Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 & J_2 \\ J_3 & J_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \theta \\ \dots \\ \Delta |V| \end{bmatrix} \quad (1.19)$$

Donnons, un ensemble initial de tensions aux jeux de barres, les puissances active et réactive sont à calculer Les écarts de puissances  $\Delta P_i^k$  et  $\Delta Q_i^k$  sont déterminées par l'équation (1.19).

Ce processus est répété jusqu'à ce que  $\Delta P_i^k$  et  $\Delta Q_i^k$  de tous les J-B soient compris entre une tolérance spécifiée.

#### I.14. Conclusion

Pour conclure cette présentation, il convient d'abord de souligner que l'avenir de ces technologies sera pour une large part déterminée par l'influence de facteurs externes. Le taux de croissance de la consommation d'énergie électrique et la sensibilité aux facteurs d'environnement exerceront une influence directe à cet égard. D'autres facteurs pourront jouer un rôle indirect, en affectant la structure des réseaux et le rythme de leur développement. On peut citer à cet égard l'influence de la répartition des centrales de production, de leurs coûts d'investissement et de fonctionnement. La volonté de mise en concurrence par les réseaux de producteurs d'électricités distants, éventuellement tempérée par des préoccupations d'autonomie énergétique locale, conditionnera également l'évolution qualitative et quantitative du transport d'électricité.

---

**- CHAPITRE II -**

**Modélisation et Calcul de**

**l'Ecoulement Optimal des Puissances**

---

---

## CHAPITRE II : Modélisation et Calcul de l'Écoulement Optimal des Puissances

---

### II.1. Introduction:

Pour pouvoir résoudre les problèmes de répartition d'énergie dans un système; il faut nécessairement avoir à sa disposition un modèle mathématique de ce système. Ce système consiste principalement en:

- générateurs d'énergie électrique
- consommateurs d'énergie électrique
- réseau d'énergie électrique

Les générateurs et consommateurs constituent les noeuds. Ces noeuds étant nombreux avec les lignes qui les relient, il va falloir déterminer un modèle mathématique de ce système afin de pouvoir résoudre le problème de l'écoulement des puissances. Cette résolution peut être traitée comme la résolution du réseau sous certaines contraintes données sous formes de tensions nodales, puissances actives et réactives générées et consommées.

La résolution du problème de l'écoulement nous permet de déterminer les tensions nodales, les angles de phase, la puissance à injecter au niveau de chaque noeud et les pertes de puissances au niveau du transport (lignes). En particulier, nous pouvons déterminer aussi les puissances à générer par les unités de production si nous connaissons la demande d'énergie par les consommateurs.

Nous pouvons considérer le problème de l'écoulement des puissances sous plusieurs points de vue. Dans le cadre de notre travail, il s'agit de résoudre le problème de l'écoulement statique sous les contraintes de type égalité et inégalité.

### II.2. Formulation du problème

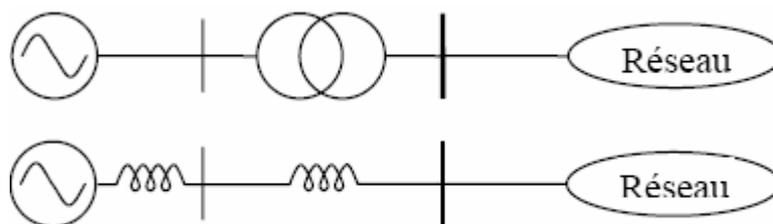
Nous avons une série de charges à alimenter à partir de générateurs. Tous sont dispersés et reliés entre eux par un réseau de liaison maillé. Les capacités de production des différents générateurs étant connues, comment calculer l'état électrique complet du réseau, c'est à dire les courants, tensions et puissances ?

Ce problème général est connu sous le nom de calcul de *répartition de charges* ou *load flow*. Ce calcul fait référence à des conditions « normales » de fonctionnement et à un régime établi.

### II.3. Constitution d'un réseau

#### II.3.1. Les générateurs

Les générateurs peuvent fournir une puissance active et fournir ou absorber une puissance réactive dans certaines limites. Les groupes importants tentent de maintenir à leurs bornes un niveau de tension donné.



*Modèle du générateur et du transformateur en système p.u.*

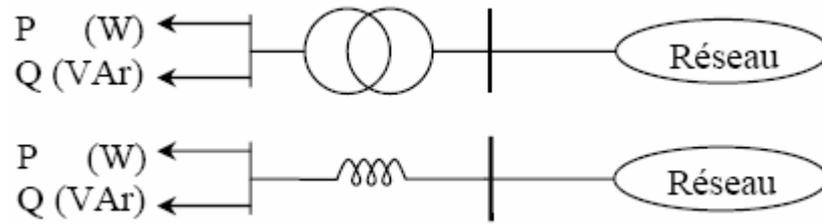
La machine sera modélisée (très simplement), dans le cadre de ce cours, par une force électromotrice placée derrière une réactance. Pour l'étude d'un régime de fonctionnement 'normal', cette réactance représente la réaction d'induit et est appelée 'réactance synchrone', notée  $X_S$  et dont l'ordre de grandeur, dans la base de la machine, est de 1 pu (100 %).

Pour une étude en régime de court-circuit, la réactance à considérer est la réactance transitoire (ordre de grandeur : 20 à 50 % dans la base de la machines) ou sub-transitoire (10 à 15 %). Chacun de ces régimes étant supposés établis dans les hypothèses de ce cours.

#### II.3.2. Les charges

La consommation d'énergie électrique est le fait de tous les secteurs de la vie économique : industries, services, ménages. Elle se présente sous des formes très diverses : moteurs synchrones et asynchrones, appareils de chauffage, ...

Au contraire des générateurs, nous ne pouvons individualiser chaque consommation. C'est l'agrégat de consommation en un noeud du réseau qui constitue la 'charge' (load) caractérisant ce noeud.



*Modèle de la charge et du transformateur en système p.u.*

La puissance appelée par la charge varie avec la tension et la fréquence qui règnent au droit de cette charge. Toutefois, une analyse en régime stationnaire suppose la constance de la fréquence. Dans le cadre de ce cours introductif, nous supposons qu'une charge peut être vue comme consommatrice de puissances active et réactive ( $P_L$ ,  $Q_L$ ) constantes.  $Q_L$  peut être positive (cas d'une charge inductive) ou négative (cas d'une charge capacitive).

Un noeud intermédiaire (poste d'aiguillage) qui n'est pas relié directement à une charge et/ou un générateur sera considéré comme un noeud « charge » dont les valeurs de  $P$  et  $Q$  sont nulles.

### **II.3.3. Le réseau proprement dit**

Le réseau proprement dit sera constitué des divers éléments de liaison (lignes, câbles, transformateurs) et les dispositifs associés (appareillages de mesure et de protection, ...).

Sous l'hypothèse de stationnarité et de symétrie triphasée<sup>1</sup>, il apparaît que le réseau peut être représenté par un schéma unifilaire. L'utilisation d'un système de grandeurs réduites (per unit) permet de modéliser ce réseau par un circuit composé d'éléments linéaires provenant de l'association des divers schémas équivalents en  $\pi$  des éléments de liaison.

En Europe, ces réseaux sont généralement fortement maillés, c'est-à-dire qu'ils possèdent de nombreux points de connexion entre les différentes lignes qui les composent.

## II.4. Bilans de puissances et balancier

### II.4.1. Bilans de puissances

Le bilan de puissance active du réseau s'écrit :

$$\sum P_{GL} = \sum P_C + \text{pertes actives du réseau}$$

La somme des puissances actives injectées par les générateurs est égale à la somme des puissances actives absorbées par les charges, augmentée des pertes actives du réseau (résistance des lignes, des câbles, etc.). L'ordre de grandeur des pertes est de 5 %.

Le bilan de puissance réactive du réseau s'écrit :

$$\sum P_{GL} = \sum Q_C + \text{générations ou consommations réactives du réseau}$$

La somme des puissances réactives injectées ou absorbées par les générateurs est égale à la somme des puissances réactives consommées/produites par les charges augmentées de la somme des consommations/productions réactives du réseau (réactance des lignes, des câbles, transformateurs, banc de condensateurs etc.). L'ordre de grandeur des consommations/productions réactives du réseau est très variable et peut être relativement élevé.

Le problème qui survient à ce niveau est qu'il n'est pas possible de prédire les termes qui viennent du réseau de manière directe. En effet, ceux-ci dépendent des niveaux réels de tension et de la répartition du transit de puissance dans les lignes et les transformateurs. Or, c'est précisément ce transit que nous cherchons à déterminer.

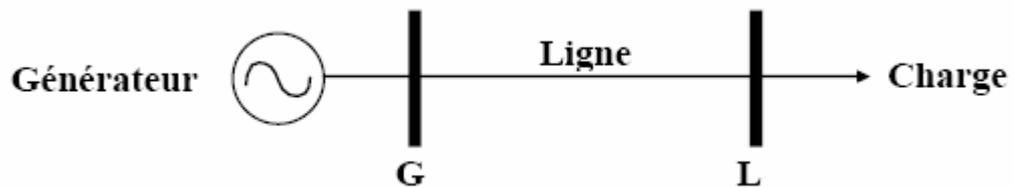
### II.4.2. Le générateur balancier

Ne connaissant pas les pertes actives en ligne, nous ne pourrions pas imposer P en tous les noeuds (générateurs et charges). Pour résoudre notre problème de « load flow », il faut donc un noeud particulier (dont le rôle est assuré en pratique par un groupe important ou un accès à un réseau important) auquel la puissance active ne pourra être imposée, mais résultera de notre calcul. Nous avons vu qu'à chaque noeud d'un réseau il faut imposer deux des quatre valeurs P, Q, V et  $\delta$  (phase de V). Vu sa nature, ce noeud particulier se verra également imposé comme référence de tension et de phase  $V \angle \delta$  ( $\delta$  pris, assez naturellement, à 0). Nous introduisons donc, dans le schéma équivalent du système étudié, un générateur particulier, dit « *générateur balancier* » ou « *slack bus* ». Celui-ci permettra de faire intervenir

dans les calculs les pertes actives du réseau tout en respectant les bilans de puissances décrits au paragraphe précédent.

Considérons le problème élémentaire d'un générateur ( $V_G, P_G$ ) alimentant une charge ( $P_L, Q_L$ ) à travers une ligne triphasée. Celle-ci sera modélisée par son schéma équivalent en  $\pi$ . Ce schéma doit répondre à la contrainte (en pu) :

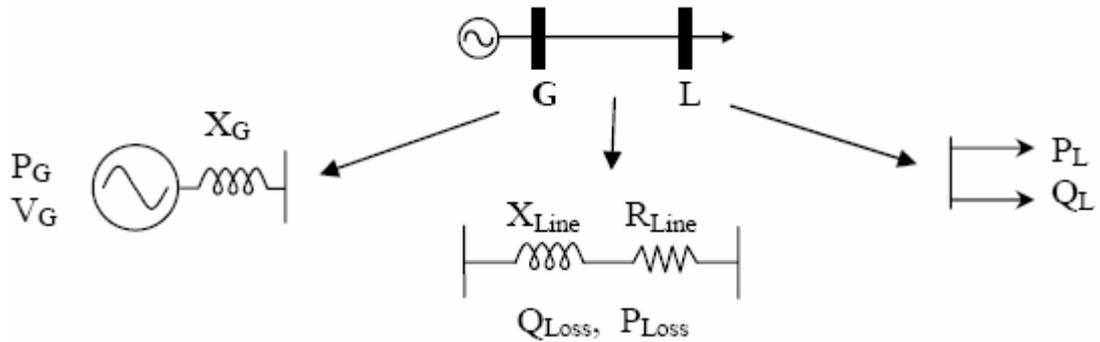
$$\begin{cases} S_C = \bar{U}_C \cdot \bar{I}_C^* = P_L + jQ_L \\ S_G = \bar{U}_G \cdot \bar{I}_G^* = P_G + jQ_G \end{cases}$$



*Schéma unifilaire d'une transmission de puissance simple*

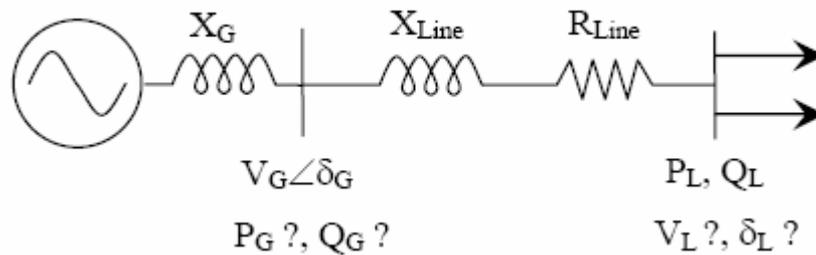
Les inconnues de base 'théoriques' sont  $V_G \angle \delta_G$  et  $V_L \angle \delta_L$ . Nous en déduisons aisément courant, puissance de transit, pertes en ligne, etc., soit la résolution complète du calcul de la répartition de charges.

Les éléments connus sont : les caractéristiques du réseau c'est à dire  $Z$  ou  $Y$ , l'existence d'un générateur (en principe  $P_G$  et  $|V_G|$ ) et la charge ( $P_L, Q_L$ ). Tel quel, ce problème est insoluble si  $P_G \neq (P_L + \text{pertes en ligne})$ , ce qui est impossible pratiquement. Il importe donc de fixer arbitrairement (mais logiquement) un niveau de tension dans le système. Cette référence de tension s'exprime en module. Il nous faut encore une référence de phase. Il est logique de faire jouer le rôle de référence de tension au générateur balancier. Le générateur de la figure 3.3 apparaîtra donc comme un générateur aux bornes duquel nous imposerons le module de la tension et la phase (usuellement  $V_G \angle 0^\circ$ ). Ce concept de balancier est indispensable au niveau du modèle utilisé et le problème du choix du générateur se pose.



**Introduction des modèles p.u. à partir du schéma descriptif**

En l'absence de transformateurs (ou, à partir d'un modèle simplifié et dans le cas particulier du système per unit, lorsque les transformateurs sont modélisés par une simple impédance que l'on peut intégrer dans Line Z ), le schéma équivalent suivant se déduit.



**Schéma simplifié équivalent par phase du circuit (en p.u.)**

Pour rendre ce cas réel, il faut imaginer que nous devons alimenter une charge «  $P_L, Q_L$  » à partir d'un générateur qui joue en fait le rôle de balancier ! En effet, il va devoir s'adapter à la demande du réseau.

Les expressions des puissances actives et réactives injectées aux noeuds G et L sont données par les formules 2.0. Elles font intervenir les tensions et phases de chaque noeud. La connaissance des tensions et phases en chaque noeud nous permet de déterminer toutes les puissances complexes injectées ainsi que les transits (S et I complexes) entre chaque noeud. Selon les conventions de la figure précédente, et notant  $Z_{Line} = Z \angle \gamma$  , nous avons :

$$\begin{aligned}
P_G &= \frac{V_G^2}{Z} \cos\gamma - \frac{V_G V_L}{Z} \cos(\delta_G - \delta_L + \gamma) \\
Q_G &= \frac{V_G^2}{Z} \sin\gamma - \frac{V_G V_L}{Z} \sin(\delta_G - \delta_L + \gamma) \\
P_L &= \frac{V_L^2}{Z} \cos\gamma - \frac{V_L V_G}{Z} \cos(\delta_L - \delta_G + \gamma) \\
Q_L &= \frac{V_L^2}{Z} \sin\gamma - \frac{V_L V_G}{Z} \sin(\delta_L - \delta_G + \gamma)
\end{aligned} \tag{2.0}$$

Les deux dernières lignes du système 2.0 consistent en un jeu de deux équations à autant d'inconnues ( $V_G$  et  $\delta_G$ ). Sa résolution permet de déterminer les valeurs de l'ensemble des tensions nodales complexes !

En supposant que les tensions et phases sont connues en chaque noeud (donc que le précédent système a été résolu), les deux premières lignes du système 2.0 permettent ensuite le calcul  $P_G$  et  $Q_G$ .

**Remarque :** En prenant l'exemple du réseau belge, l'ordre de grandeur des pertes actives est de 5%. En régime de forte charge, la puissance consommée est voisine de 15 GW.  $5\% \times 15000 \text{ MW} = 750 \text{ MW}$ , ce qui correspond à l'équivalent d'un groupe nucléaire tel que ceux actuellement en place à la centrale de Tihange ! On ne choisit donc pas un noeud balancier au hasard. Concrètement, on augmente « fictivement » les charges de quelques pourcents de manière à couvrir une grande partie des pertes de manière distribuée, le reliquat provenant d'un noeud balancier raisonnable (point de liaison avec la France).

En résumé, le problème de la répartition de charge d'un réseau donné est correctement posé si nous considérons, en chaque noeud du réseau, un des types de contraintes ci-dessous :

- P et Q imposés :

*Noeud où est connecté une charge (avec le cas particulier  $P$  et  $Q = 0$ ), représentent environ 80% des noeuds.*

- P et V imposés :

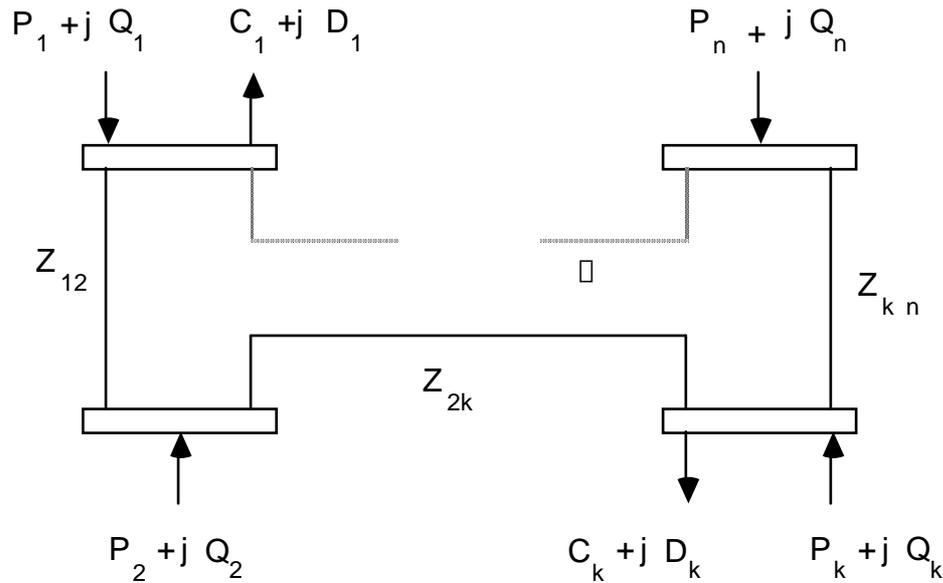
*Noeud où est connecté un générateur destiné à soutenir la tension, (environ 20% des noeuds).*

- V et  $\delta$  imposés:

*Noeud où est connecté un générateur qui joue le rôle de balancier. Il n'y en a qu'un seul.*

### II.5. Notions de modélisation du réseau

Soit un réseau électrique simplifié représenté par la figure 2.1:



*Figure 2.1 : schéma d'un réseau électrique simplifié*

Parmi les différents modèles mathématiques qui décrivent ce réseau, nous citerons le modèle dit " modèle des potentiels nodaux ". Ce modèle est très souvent utilisé quant aux problèmes de répartition économique d'énergie électrique dans les systèmes réels. Pour profiter de ce modèle, nous devons transformer les impédances des branches du réseau en admittances; pour cela, nous posons:

$$y_{km} = \frac{1}{Z_{km}} = \frac{1}{r_{km} + jx_{km}} = \frac{r_{km}}{r_{km}^2 + x_{km}^2} - j \frac{x_{km}}{r_{km}^2 + x_{km}^2} \quad (2.1)$$

où  $y_{km}$  est appelée admittance de la branche k-m

et

$$y_{km} = G_{km} - j B_{km} \quad (2.2)$$

avec  $G_{km} = \text{réel} [ y_{km} ]$  appelée conductance

et  $B_{km} = I_m [ y_{km} ]$  appelée susceptance

Supposons maintenant qu'il y a dans un réseau  $(n + 1)$  noeuds et choisissons un noeud comme étant le noeud de référence appelé 0. Ecrivons les équations des courants au niveau de chaque noeud :

$$\left[ \begin{array}{l} I_{11} + \dots + I_{1n} + I_{10} = 0 \\ I_{21} + \dots + I_{2n} + I_{20} = 0 \\ \vdots \\ I_{n1} + \dots + I_{nn} + I_{n0} = 0 \end{array} \right] \quad (2.3)$$

où  $I_{km}$  est le courant traversant la branche k-m.

Ecrivons les relations (2.3) sous la forme suivante :

$$\left[ \begin{array}{l} y_{11} E_{11} + \dots + y_{1n} E_{1n} + y_{10} E_{10} = 0 \\ y_{21} E_{21} + \dots + y_{2n} E_{2n} + y_{20} E_{20} = 0 \\ \vdots \\ y_{n1} E_{n1} + \dots + y_{nn} E_{nn} + y_{n0} E_{n0} = 0 \end{array} \right] \quad (2.4)$$

de plus l'admittance mutuelle  $Y_{km}$  s'exprime par la relation suivante:

$$Y_{km} = - y_{km} \quad (2.5)$$

et l'admittance propre comme:

$$Y_{kk} = \sum_{m \neq k}^n y_{km} + \sum_{m=1}^n \frac{y'_{km}}{2} \quad (2.6)$$

nous profitons des relations (2.5 et 2.6) pour écrire l'ensemble des équations (2.4) comme suit:

$$\sum_{m=1}^n y_{km} E_m = I_k \quad (2.7)$$

avec  $m = 1; \dots; n$ .

Le calcul du réseau par la méthode des potentiels nodaux s'effectue par la recherche des potentiels  $E_k$  ( $k = 1; \dots; n$ ) ou autrement dit par la résolution des équations .

Dans un réseau comprenant  $n$  noeuds, les équations reliant les tensions aux noeuds  $E$  et les courants injectés aux noeuds  $I$  forment donc un système linéaire d'ordre  $n$ :

$$\mathbf{I} = \mathbf{Y} \cdot \mathbf{E} \quad (2.8)$$

L'état du réseau serait entièrement déterminé par la résolution de ces équations linéaires, si l'on imposait à chaque noeud soit la tension soit le courant injecté. En pratique, ce n'est pas ainsi que le problème se pose. Il faut distinguer:

- a. les noeuds producteurs (associés aux centrales) où la puissance active et le module de la tension sont connus.
- b. les noeuds consommateurs (associés aux charges) où les puissances actives et réactives sont connues.
- c. le noeud balancier (associé à une centrale généralement la plus puissante) où le module de la tension et la phase de celle-ci sont connus. Généralement on fixe la phase  $\delta = 0$  et les phases des tensions des autres noeuds sont calculées par rapport au noeud balancier. Ne connaissant pas a priori les pertes d'énergie du réseau pour un régime déterminé, on est obligé de laisser varier la production de puissance active de l'une de ces centrales afin de satisfaire l'équation :

$$\mathbf{Production} = \mathbf{Consommation} + \mathbf{Pertes}$$

En résumé, le problème se pose sous la forme suivante:

	données	inconnues
noeud producteur	P et  E	Q et $\delta$
noeud consommateur	P et Q	E  et $\delta$
noeud balancier	E  et $\delta$	P et Q

Les équations linéaires de la méthode des noeuds ne sont donc pas applicables. Pour un noeud consommateur, par exemple, on ne connaît ni la tension E ni le courant injecté I. On peut cependant estimer la valeur de la tension en ce noeud et si l'on choisit une valeur de cette tension comme valeur de première approximation, connaissant les puissances actives P et réactives Q, on déduit la valeur du courant I. Le même processus se répètera jusqu'à ce que les valeurs des tensions et des courants convergent vers leur valeur finale.

Nous pouvons profiter des méthodes de Gauss, Gauss-Seidel, Ward-Hale, Relaxation ou Newton-Raphson qui sont des méthodes de calcul itératif et que nous pouvons appliquer à la résolution de ces équations linéaires. Nous citerons à titre d'exemple les méthodes de Gauss-Seidel et de Newton-Raphson qui sont les plus utilisées.

### II.6. Ecoulement des puissances dans un système énergétique:

Soit le système représenté par la figure 2.1. La puissance apparente au noeud k s'exprime comme suit :

$$S_k = P_k + j Q_k \tag{2.9}$$

où:

$$S_k = E_k I_k^* \tag{2.10}$$

or:

$$I_k^* = \sum_{m=1}^n y_{km}^* E_m^* \tag{2.11}$$

d'où:

$$S_k = E_k \sum_{m=1}^n Y_{km}^* E_m^* \quad (2.12)$$

le potentiel au noeud peut s'écrire de la manière suivante:

$$E_k = E_k e^{j\delta_k} = E_k (\cos \delta_k + j \sin \delta_k) = E_k^a + j E_k^r \quad (2.13)$$

$$E_k^a = E_k \cos \delta_k$$

$$E_k^r = E_k \sin \delta_k$$

si nous connaissons  $E_k^a$  et  $E_k^r$ , nous pouvons écrire:

$$\delta_k = \text{Arccos} \frac{E_k^a}{E_k} \quad (2.14)$$

soit le noeud m. On aura alors:

$$E_m = E_m e^{j\delta_m} = E_m^a + j E_m^r \quad (2.15)$$

l'admittance de la branche k-m sera exprimée comme suit:

$$Y_{km} = Y_{km} e^{j\theta_m} \quad (2.16)$$

ou:

$$Y_{km} = G_{km} + j B_{km}$$

Nous pouvons donc écrire la relation (2.12) sous la forme suivante:

$$S_k = E_k \sum_{m=1}^n Y_{km}^* E_m^* = E_k e^{j\delta_k} \sum_{m=1}^n Y_{km} e^{-j\theta_{km}} E_m e^{-j\delta_m} = \sum_{m=1}^n Y_{km} E_k E_m e^{j(\delta_k - \delta_m - \theta_{km})} \quad (2.17)$$

d'où:

$$S_k = Y_{kk} E_k^2 e^{j(\delta_k - \delta_k - \theta_{kk})} + \sum_{m=1}^n Y_{km} E_k E_m e^{j(\delta_k - \delta_m - \theta_{km})} \quad (2.18)$$

donc:

$$S_k = Y_{kk} E_k^2 (\cos \theta_{kk} + j \sin \theta_{kk}) + \sum_{m=1}^n Y_{km} E_k E_m \{ \cos(\delta_k - \delta_m - \theta_{km}) + j \sin(\delta_k - \delta_m - \theta_{km}) \} \quad (2.19)$$

Ecrivons  $S_k$  sous la forme suivante:

$$S_k = Y_{kk} E_k^2 (\cos \theta_{kk}) + \sum_{m=1}^n Y_{km} E_k E_m \{ \cos(\delta_k - \delta_m - \theta_{km}) \} + j \left\{ -Y_{kk} E_k^2 \sin \theta_{kk} + \sum_{m=1}^n Y_{km} E_k E_m \{ \sin(\delta_k - \delta_m - \theta_{km}) \} \right\} \quad (2.20)$$

comme  $S_k$  est de la forme:

$$S_k = P_k + j Q_k$$

on aura alors:

$$P_k = Y_{kk} E_k^2 (\cos \theta_{kk}) + \sum_{m=1}^n Y_{km} E_k E_m \{ \cos(\delta_k - \delta_m - \theta_{km}) \} \quad (2.21)$$

$$Q_k = -Y_{kk} E_k^2 \sin \theta_{kk} + \sum_{m=1}^n Y_{km} E_k E_m \{ \sin(\delta_k - \delta_m - \theta_{km}) \} \quad (2.22)$$

Définissons les relations d'injection qui sont les suivantes:

$$H_k = I_k (\delta ; E) - P_k + C_k = 0 \quad (2.29)$$

$$V_k = K_k (\delta ; E) - Q_k + D_k = 0 \quad (2.30)$$

où:

$\delta$  est le vecteur des phases  $\delta_1; \dots; \delta_n$ .

$E$  est le vecteur des tensions nodales  $E_1; \dots; E_n$ .

Soient  $I_k$  l'injection des puissances actives et  $K_k$  l'injection des puissances réactives :

$$I_k = Y_{kk} E_k^2 \cos \theta_{kk} + \sum_{m=1}^n Y_{km} E_k E_m \{ \cos(\delta_k - \delta_m - \theta_{km}) \} \quad (2.31)$$

$$K_k = -Y_{kk} E_k^2 \sin \theta_{kk} + \sum_{m=1}^n Y_{km} E_k E_m \{ \sin(\delta_k - \delta_m - \theta_{km}) \} \quad (2.32)$$

## II.6.1. Méthode de Newton-Raphson

### II.6.1.1. Le principe de l'algorithme de Newton-Raphson

Une méthode de Newton-Raphson d'analyse non linéaire détermine itérativement la solution de  $g(x)=0$  sous la condition que la dérivée existe. Ainsi, partant d'une solution  $x^{(0)}$  pas trop "éloignée" de la vraie solution  $\bar{x}$ , on détermine une meilleur approximation

$$x^{(1)} = x^{(0)} - \frac{g(x^{(0)})}{g'(x^{(0)})}$$

$$\vdots$$

$$x^{(n)} = x^{(n-1)} - \frac{g(x^{(n-1)})}{g'(x^{(n-1)})}$$

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - \frac{g(x^{(n)})}{g'(x^{(n)})}$$

jusqu'à ce que la différence entre les deux dernières valeurs calculées soit négligeable.

Cet algorithme a une interprétation géométrique simple puisque en écrivant  $n^{eme}$  la équation précédente sous la forme on voit sur la figure 2.5 que c'est l'équation d'une droite de pente interceptant l'axe des  $x$  au point  $x^{(n+1)}$ . Ainsi, à chaque itération, on construit une droite de pente  $g'(x^{(n)})$  à partir du point  $(x^{(n)}, g(x^{(n)}))$ , l'intersection avec l'axe des  $x$  étant l'approximation suivante.

En terme de vitesse de convergence, l'algorithme de Newton-Raphson est quadratique, puisque l'erreur au pas est proportionnelle au carré de l'erreur du pas précédent. En effet, avec

$$\mathcal{E}^{(n)} = \bar{x} - x^{(n)}$$

$$\mathcal{E}^{(n+1)} = \bar{x} - x^{(n+1)}$$

$$\mathcal{E}^{(n+1)} = \bar{x} - x^{(n)} + \frac{g(x^{(n)})}{g'(x^{(n)})}$$

$$\mathcal{E}^{(n+1)} = \mathcal{E}^{(n)} + \frac{g(x^{(n)})}{g'(x^{(n)})}$$

et à partir du développement en série de Taylor de  $g(x)$  au voisinage de sa racine  $\bar{x}$

$$g(x) = g(\bar{x}) + g'(\bar{x})(x - \bar{x}) + \frac{1}{2}g''(\bar{x})(x - \bar{x})^2 + \dots,$$

avec

$$g(\bar{x}) = 0 \text{ et } g(x^{(n)}) = \mathcal{E}^{(n)}g'(\bar{x}) + \frac{(\mathcal{E}^{(n)})^2}{2}g''(\bar{x}) + \dots,$$

divisée par  $g'(\bar{x})$  et substituée dans  $\mathcal{E}^{(n+1)}$ , on détermine  $\mathcal{E}^{(n+1)} = \frac{(\mathcal{E}^{(n)})^2}{2} \frac{g''(\bar{x})}{g'(\bar{x})}$

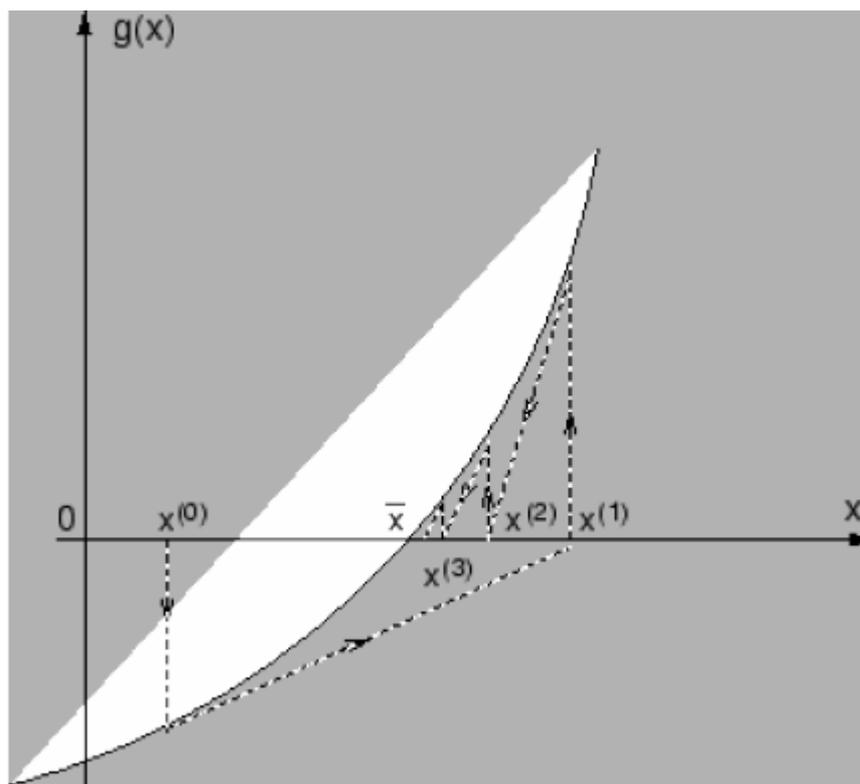


figure 2.5 : interprétation géométrique de la Méthode de Newton-Raphson

### II.6.1.2. L'algorithme de Newton-Raphson pour un système d'équations

Si la fonction  $G(x)$  est dérivable au voisinage de  $x = x^{(n)} = [x_1^{(n)}, \dots, x_m^{(n)}]^T$  elle a pour série de Taylor

$$G(x) = g(x^{(n)}) + J(x^{(n)})(x - x^{(n)}) + \dots$$

avec  $G(x) = [g_1(x), \dots, g_m(x)]$  et  $J(x^{(n)})$  étant le Jacobien (matrice de Jacobi) tel que

$$J(x^{(n)}) = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial g_1}{\partial x_1} \right|_{x^{(n)}} & \left. \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \right|_{x^{(n)}} & \dots & \left. \frac{\partial g_1}{\partial x_m} \right|_{x^{(n)}} \\ \left. \frac{\partial g_2}{\partial x_1} \right|_{x^{(n)}} & \left. \frac{\partial g_2}{\partial x_2} \right|_{x^{(n)}} & \dots & \left. \frac{\partial g_2}{\partial x_m} \right|_{x^{(n)}} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \left. \frac{\partial g_m}{\partial x_1} \right|_{x^{(n)}} & \left. \frac{\partial g_m}{\partial x_2} \right|_{x^{(n)}} & \dots & \left. \frac{\partial g_m}{\partial x_m} \right|_{x^{(n)}} \end{bmatrix}$$

Sur l'itération suivante, en négligeant les termes d'ordre supérieur à 2 du développement, on peut écrire

$$G(x^{(n+1)}) = g(x^{(n)}) + J(x^{(n)})(x^{(n+1)} - x^{(n)}),$$

et si  $x^{(n+1)}$  est une solution suffisamment proche de la vraie solution  $\bar{x}$ , on obtient avec  $G(x^{(n+1)}) = 0$ ,

$$g(x^{(n)}) + J(x^{(n)})(x^{(n+1)} - x^{(n)}) = 0$$

ainsi que la formule dite "de l'algorithme de Newton-Raphson"

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - [J(x^{(n)})]^{-1} G(x^{(n)})$$

On notera qu'on peut éviter l'inversion du Jacobien, en résolvant sur chaque itération directement l'équation linéarisée de Newton-Raphson

$$J(x^{(n)})x^{(n+1)} = J(x^{(n)})x^{(n)} - G(x^{(n)})$$

par une méthode numérique de résolution d'un système d'équations linéaires.

### II.6.1.3. Application de la Méthode de Newton-Raphson pour les Puissances Actives et Réactives

Cette méthode permet la résolution d'un système d'équations non linéaires exprimant les puissances actives et réactives en fonction des tensions nodales :

la puissance au noeud k est:

$$P_k - j Q_k = E_k^* I_k \quad (2.33)$$

et comme:

$$I_k = \sum_{m=1}^n Y_{km} E_m \quad (2.34)$$

$$E_k = e_k + j f_k$$

$$E_m = e_m + j f_m$$

$$Y_{km} = G_{km} + j B_{km}$$

l'équation (2.33) devient:

$$P_k - j Q_k = (e_k - j f_k) \sum_{m=1}^n (G_{km} - j B_{km})(e_m + j f_m) \quad (2.35)$$

en séparant les parties réelles et imaginaires, nous aurons:

$$P_k = \sum_{m=1}^n \{e_k(e_m G_{km} + f_m B_{km}) + f_k(f_m G_{km} - e_m B_{km})\} \quad (2.36)$$

$$Q_k = \sum_{m=1}^n \{f_k(e_m G_{km} + f_m B_{km}) - e_k(f_m G_{km} - e_m B_{km})\} \quad (2.37)$$

De cette formulation résulte donc un système d'équations non linéaires, deux pour chaque noeud du réseau. Les puissances actives et réactives  $P_k$  et  $Q_k$  sont connues. Les composantes réelles et imaginaires de la tension  $e_k$  et  $f_k$  sont inconnues pour tous les noeuds sauf pour le noeud de référence qu'on appelle aussi noeud balancier où la tension est spécifiée et maintenue constante. Nous aurons donc  $2(n-1)$  équations à résoudre pour la solution du problème de la répartition des charges.

La méthode de Newton-Raphson exige qu'un système d'équations linéaires soit formé exprimant les relations entre les variations des puissances actives et réactives et aussi celles des composantes réelles et imaginaires des tensions nodales comme l'indique la figure ci-dessous:

$$\begin{bmatrix} \Delta P_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \Delta P_{n-1} \\ \Delta Q_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \Delta Q_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_1}{\partial e_1} & \dots & \frac{\partial P_1}{\partial e_{n-1}} & \frac{\partial P_1}{\partial f_1} & \dots & \frac{\partial P_1}{\partial f_{n-1}} \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial P_{n-1}}{\partial e_1} & \dots & \frac{\partial P_{n-1}}{\partial e_{n-1}} & \frac{\partial P_{n-1}}{\partial f_1} & \dots & \frac{\partial P_{n-1}}{\partial f_{n-1}} \\ \frac{\partial Q_1}{\partial e_1} & \dots & \frac{\partial Q_1}{\partial e_{n-1}} & \frac{\partial Q_1}{\partial f_1} & \dots & \frac{\partial Q_1}{\partial f_{n-1}} \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial Q_{n-1}}{\partial e_1} & \dots & \frac{\partial Q_{n-1}}{\partial e_{n-1}} & \frac{\partial Q_{n-1}}{\partial f_1} & \dots & \frac{\partial Q_{n-1}}{\partial f_{n-1}} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \Delta e_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \Delta e_{n-1} \\ \Delta f_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \Delta f_{n-1} \end{bmatrix}$$

où les coefficients de la matrice est le Jacobien et le n<sup>ème</sup> noeud est le noeud de référence.

Sous la forme matricielle, le système précédent devient:

$$\begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 & J_2 \\ J_3 & J_4 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \Delta e \\ \Delta f \end{bmatrix}$$

Pour la détermination des éléments du jacobien, nous utiliserons les équations qui donnent les puissances. Les variations des puissances sont les différences entre les valeurs planifiées et calculées:

$$\Delta P_k^{(1)} = P_{ks} - P_k^{(1)}$$

$$\Delta Q_k^{(1)} = Q_{ks} - Q_k^{(1)}$$

Les tensions nodales et les puissances calculées sont utilisées pour calculer les courants nodaux pour évaluer les éléments du jacobien. Le système d'équations linéaires précédent peut être résolu pour  $\Delta e_k$  et  $\Delta f_k$  par une méthode itérative. Les nouvelles valeurs des tensions nodales seront:

$$e_k^{(i+1)} = e_k^{(1)} + \Delta e_k^{(1)}$$

$$f_k^{(i+1)} = f_k^{(1)} + \Delta f_k^{(1)}$$

Algorithme

**ALGORITHME**

**Newton-Raphson**

**DEBUT**

Déclaration des structures des données (Variable et Tableaux)

Lecture des éléments définissant l'architecture du réseau

Formation matrice admittance

Définir  $E_k^{(0)}$

Calculer l'itération 1 ( $i=1$ )

$$P_k^{(1)} = \sum_{k=1}^n [e_k^{(1)} (e_m^{(1)} G_{km} + f_m^{(1)} B_{km}) + f_k^{(1)} (f_m^{(1)} G_{km} - e_m^{(1)} B_{km})]$$

$$Q_k^{(1)} = \sum_{k=1}^n [f_k^{(1)} (e_m^{(1)} G_{km} + f_m^{(1)} B_{km}) - e_k^{(1)} (f_m^{(1)} G_{km} - e_m^{(1)} B_{km})]$$

$$\Delta P_k^{(1)} = P_{ks} - P_k^{(1)}$$

$$\Delta Q_k^{(1)} = Q_{ks} - Q_k^{(1)}$$

I=1

**TANTQUE**  $\max(\Delta P_k^{(i)}) > \varepsilon$  **ET**  $\max(\Delta Q_k^{(i)}) > \varepsilon$

**FAIRE**

$$I_k^{(i)} = \frac{P_k^{(i)} - jQ_k^{(i)}}{E_k^{(i)}}$$

Calcul des éléments du JACOBIEN

$$\begin{bmatrix} \Delta P^{(i)} \\ \Delta Q^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1^{(i)} & J_2^{(i)} \\ J_3^{(i)} & J_4^{(i)} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \Delta e_k^{(i)} \\ \Delta f_k^{(i)} \end{bmatrix}$$

Calcul et correction des tensions

$$e_k^{(i+1)} = e_k^{(i)} + \Delta e_k^{(i)}$$

$$f_k^{(i+1)} = f_k^{(i)} + \Delta f_k^{(i)}$$

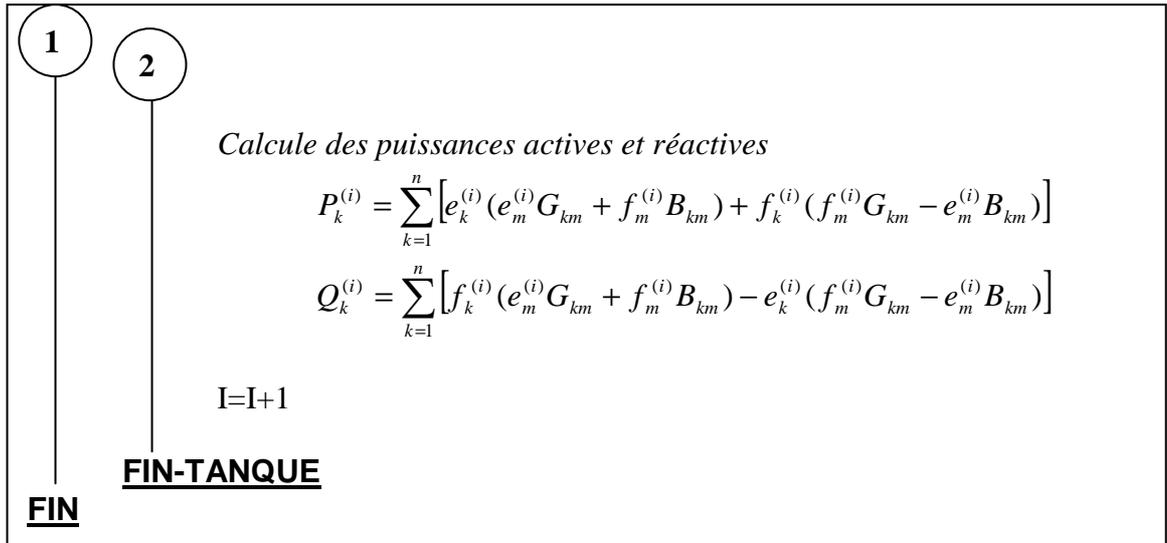
Calcul de la nouvelle précision

$$\Delta P_k^{(1)} = P_{ks} - P_k^{(1)}$$

$$\Delta Q_k^{(1)} = Q_{ks} - Q_k^{(1)}$$

1

2



**Programme de la méthode de Newton-Raphson**

Le procédé est répété jusqu'à ce que l'on atteigne la tolérance choisie pour  $\Delta P_k^{(1)}$  et  $\Delta Q_k^{(1)}$  de tous les noeuds.

**II.6.2. Méthode de Gauss-Seidel:**

Cette méthode dérivant de la méthode itérative de Gauss utilisant la matrice admittance consiste à supposer initialement les tensions pour tous les noeuds excepté le noeud balancier où la tension est spécifiée et maintenue constante. Outre le noeud balancier pris comme noeud de référence, les courants sont calculés pour tous les noeuds comme suit :

$$I_k = \frac{S_k^*}{E_k^*} = \frac{P_{k-j} - j Q_k}{E_k^*} \tag{2.42}$$

n désignant le nombre de noeuds dans le réseau

k désignant le noeud considéré avec  $k \neq s$

En utilisant les équations (2.8) et (2.42) , nous pouvons écrire:

$$\frac{P_{k-j} - j Q_k}{E_k^*} = \sum_{m=1}^n E_m Y_{km} \tag{2.43}$$

avec  $k=1; \dots; n$

$m=1; \dots; n$

ou encore:

$$\frac{P_{k-j} Q_k}{E_k^*} = E_k Y_{kk} + \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^n E_m Y_{km} \quad (2.44)$$

et nous obtenons l'équation de la tension  $E_k$  qui s'écrit:

$$E_k = \frac{1}{Y_{kk}} \left( \frac{P_{k-j} Q_k}{E_k^*} - \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^n E_m Y_{km} \right) \quad (2.45)$$

Cette dernière équation est la base du calcul itératif qui se fait de la manière suivante :

La tension du noeud de bilan et les tensions estimées pour tous les autres noeuds sont substituées dans l'équation (2.45) pour obtenir des nouvelles valeurs de tensions.

Ces nouvelles valeurs sont encore utilisées dans l'équation (2.45) pour le calcul d'autres nouvelles tensions et ainsi de suite. Le processus se poursuit jusqu'à ce que la différence entre la tension trouvée et celle qui la précède pour chaque noeud soit inférieure à une certaine valeur appelée  $\epsilon$  imposée depuis le début du calcul.

Posons:

$$KL_k = \frac{P_{k-j} Q_k}{Y_{kk}} \quad (2.46)$$

et

$$YL_{km} = \frac{Y_{km}}{Y_{kk}} \quad (2.47)$$

l'équation (2.45) devient:

$$E_k = \frac{KL_k}{E_k^*} - \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^n YL_{km} E_m \quad (2.48)$$

Dans le cas de Gauss-Seidel l'équation (2.45) devient :

$$E_k^{(i+1)} = \frac{KL_k}{(E_k^i)^*} - \sum_{m=1}^{k-1} YL_{km} E_m^{(i+1)} - \sum_{m=k+1}^n YL_{km} E_m^i \quad (2.49)$$

**Remarque:**

Pour accélérer la convergence et avoir un nombre moindre d'itérations, on multiplie les corrections  $\Delta E_k$  par un coefficient  $\alpha$  appelé coefficient d'accélération de convergence. Ce dernier prend généralement la valeur 1.4 et le processus de calcul se fait suivant l'organigramme suivant:.

**Algorithme**

**ALGORITHME**

**Gauss-Seidel**

**DEBUT**

Déclaration des structures des données (Variable et Tableaux) ;

Lecture des éléments définissant l'architecture du réseau ;

Formation matrice admittance ;

Définir  $E_k^{(0)}$   $k = 1, \dots, n$   $k \neq s$  ;

Calculer des :

$$KL_k \quad k = 1, \dots, n \quad k \neq s ;$$

et

$$YL_{km} \quad k = 1, \dots, n \quad k \neq s \quad m = 1, \dots, n ;$$

Calculer l'itération 1 ( $i=1$ ) ;

$$E_k^{(1)} := \frac{KL_k}{E_k^{(0)}} - \sum_{m=1}^{k-1} (YL_{km} E_m^{(1)}) - \sum_{m=k+1}^n (YL_{km} E_m^{(0)}) ;$$

$$\Delta E_k^{(0)} := E_k^{(1)} - E_k^{(0)} ;$$

I := 1

**TANTQUE**  $\max(\Delta E_k^{(i)}) > \varepsilon$

**FAIRE**

$k := 1$  ;

**TANTQUE**  $k \leq n$

**FAIRE**

**SI**  $k \neq s$

**ALORS**

Résoudre les équations au nœud  $k$  ;

$$E_k^{(i+1)} := \frac{KL_k}{E_k^{(i)}} - \sum_{m=1}^{k-1} (YL_{km} E_m^{(i+1)}) - \sum_{m=k+1}^n (YL_{km} E_m^{(i)}) ;$$

$$\Delta E_k^{(i)} := E_k^{(i+1)} - E_k^{(i)} ;$$

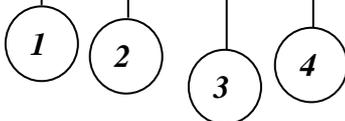
**SI**

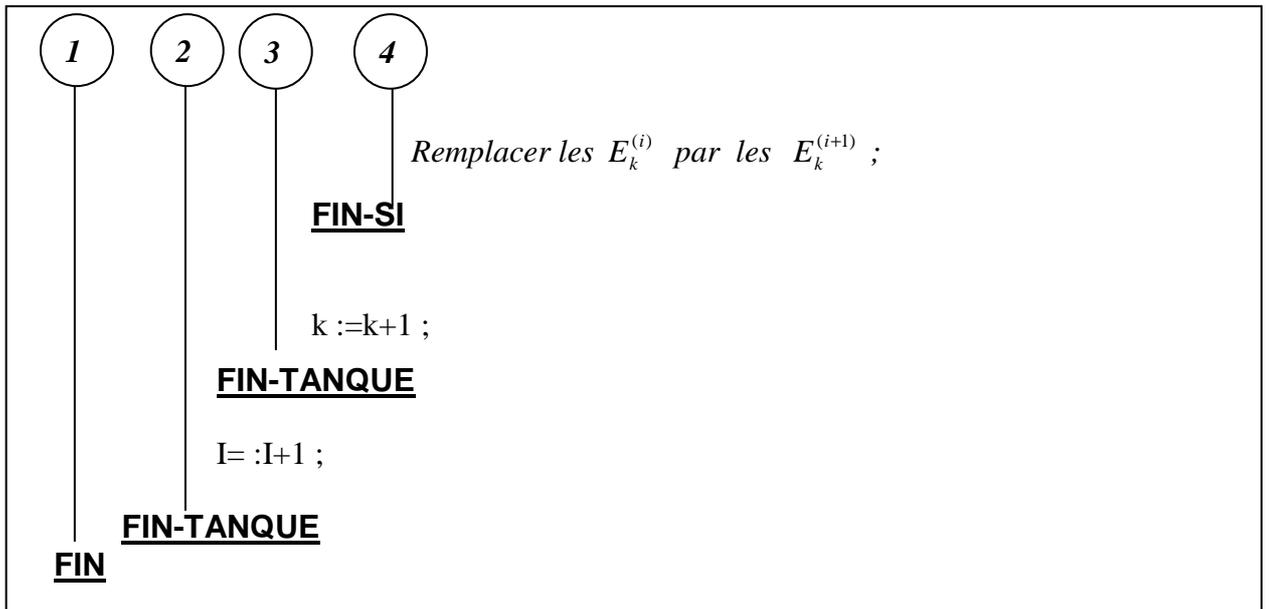
**ALORS**

$$|\Delta E_k^i| > \max \Delta E_k^i$$

$$\max \Delta E_k^{(i)} := |\Delta E_k^{(i)}| ;$$

**FIN-SI**





*Programme de la méthode de Gauss-Seidel*

---

**- CHAPITRE III -**  
**Les Méthodes d'Optimisation**

---

---

**CHAPITRE III : Les Méthodes d'Optimisation**

---

**III.1. Introduction**

Deux facteurs ont contribué à relancer l'intérêt pour l'optimisation mathématique : d'abord l'accroissement prodigieux de la puissance de calcul des ordinateurs, mais aussi l'arrivée d'algorithmes plus performants. Notamment lorsque les solutions recherchées sont dites "discrètes", c'est-à-dire lorsqu'elles se présentent sous la forme de choix binaires (j'engage telle locomotive sur tel train ou sur tel autre train). Un cas de figure plus fréquent et malheureusement plus complexe à traiter que les problèmes "à variables continues". "Les problèmes faciles sont ceux pour lesquels on sait qu'il existe une méthode exacte qui peut résoudre le problème en un temps polynomial : si vous avez des données de taille  $n$ , le temps de calcul sera proportionnel à une puissance de  $n$  ( $n^2$ ,  $n^3$ , etc.)". *David De Almeida - direction de l'Innovation & de la Recherche de la SNCF.*

Pour les problèmes difficiles, les méthodes exactes requièrent un temps de calcul exponentiel : si un problème de taille 10 exige une minute de résolution, un problème de taille 100 pourra demander plusieurs jours, voire plusieurs semaines. On est très vite dépassé. D'où la nécessité de recourir à des algorithmes "approchés", qui n'ont pas pour ambition de trouver la solution optimale, mais une solution satisfaisante qui s'en approche. L'astuce, dans un problème à variables discrètes comme un programme linéaire en nombres entiers, sera par exemple d'autoriser des choix continus. En clair, de permettre au programme d'affecter une moitié ou un tiers de locomotive à un train donné. Les calculs, plus faciles, livrent une solution bien sûr inadmissible, mais qui fixe le gain ultime d'efficacité que l'on ne peut pas dépasser. La solution au problème réel est alors calculée, par exemple, en arrondissant la solution continue du problème plus général que l'on vient de résoudre. L'algorithme permet alors de chiffrer l'écart entre la solution approchée qu'il fournit dans ce cas particulier et la solution idéale du problème à variables continues.

### III.2. Problèmes d'optimisation

En mathématiques, l'**optimisation** est l'étude des problèmes qui sont de la forme :

**Étant donné** : une fonction  $f : A \mapsto \mathbb{R}$  d'un ensemble  $A$  dans l'ensemble des nombre réels

**Rechercher** : un élément  $x_0$  de  $A$  tel que  $f(x_0) \geq f(x)$  pour tous les  $x$  en  $A$  («maximisation») ou tel que  $f(x_0) \leq f(x)$  pour tous les  $x$  en  $A$  («minimisation»).

Une telle formulation est parfois appelée *programme mathématique* (terme non directement lié à la programmation informatique, mais utilisé par exemple pour la programmation linéaire ou la programmation non linéaire). Plusieurs problèmes théoriques et pratiques peuvent être étudiés dans cet encadrement général.

Étant donné que la maximisation de  $f$  est équivalente à la minimisation de  $-f$ , une méthode pour trouver le minimum (ou le maximum) suffit à résoudre le problème d'optimisation.

Il arrive fréquemment que  $A$  soit un sous-ensemble donné de l'espace euclidien  $\mathbb{R}^n$ , souvent spécifié par un ensemble de contraintes, des égalités ou des inégalités que les éléments de  $A$  doivent satisfaire. Les éléments de  $A$  sont appelés les *solutions admissibles* et la fonction  $f$  est appelée la *fonction objectif*. Une solution possible qui maximise (ou minimise, si c'est le but) la fonction objectif est appelée une *solution optimale*. Dans le cas particulier où  $A$  est un sous-ensemble de  $\mathbb{N}^n$  ou de  $\mathbb{N}^p \times \mathbb{R}^q$ , on parle d'optimisation combinatoire.

Un minimum local  $x^*$  est défini comme un point tel qu'il existe un voisinage  $V$  de  $x^*$  tel que pour tout  $x \in V$ ,  $f(x) \geq f(x^*)$ ; c'est-à-dire que dans un voisinage de  $x^*$  toutes les valeurs de la fonction sont plus grandes que la valeur en ce point. Lorsque  $A$  est un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^n$ , ou plus généralement un espace vectoriel normé, cela s'écrit : pour un  $\delta > 0$  donné et tous les  $x$  tels que  $\|x - x^*\| \leq \delta$  on a  $f(x) \geq f(x^*)$ . Les maximums locaux sont définis semblablement. En général, il est facile de trouver les minimums (maximums) locaux, qui sont parfois nombreux. Pour vérifier que la solution trouvée est un minimum (maximum) global, il est nécessaire de recourir à des connaissances additionnelles sur le problème (par exemple la convexité de la fonction objectif).

### III.3. Les méthodes d'optimisations

Historiquement, dans le domaine de l'optimisation, le premier terme introduit fut celui de programmation linéaire, inventé par George Dantzig dans les années 1940. Le terme *programmation* dans ce contexte ne réfère pas à la programmation informatique (bien que les ordinateurs soient largement utilisés de nos jours pour résoudre des programmes mathématiques). Il vient de l'usage du mot *programme* par les forces armées américaines pour établir des horaires de formation et des choix logistiques, que Dantzig étudiait à l'époque. L'emploi du terme « programmation » avait également un intérêt pour débloquer des crédits en une époque où la planification devenait une priorité des gouvernements.

Les techniques pour résoudre les problèmes d'optimisation dépendent de la nature de la fonction objective de l'ensemble contraint. Les sous-domaines majeurs suivants existent :

- ***la programmation linéaire***  
étudie les cas où la frontière de l'ensemble A et la fonction objectif sont linéaires. C'est une méthode très employée pour établir les programmes des raffineries pétrolières, mais aussi pour déterminer la composition la plus rentable d'un mélange salé, sous contraintes, à partir des prix de marché du moment.
- ***la programmation linéaire en nombres entiers***  
étudie les programmes linéaires dans lesquels certaines ou toutes les variables sont contraintes à prendre des valeurs entières. Ces problèmes peuvent être résolus par différentes méthodes: séparation et évaluation, plans sécants.
- ***la programmation quadratique***  
permet à la fonction objective d'avoir des termes quadratiques, tout en conservant une description de l'ensemble A à partir d'égalités/inégalités linéaires
- ***la programmation non-linéaire***  
étudie le cas général dans lequel l'objectif ou les contraintes (ou les deux) contiennent des parties non-linéaires
- ***la programmation stochastique***  
étudie le cas dans lequel certaines des contraintes dépendent de variables aléatoires
- ***la programmation dynamique***  
utilise la propriété qu'une solution optimale se compose nécessairement de sous-solutions optimales (attention : le contraire n'est pas vrai en général) pour décomposer

le problème en évitant l'explosion combinatoire. Elle n'est utilisable que lorsque la fonction objectif est monotone croissante. C'est la programmation dynamique qui permet par exemple

- aux avionneurs de trouver les plans de décollage optimaux de leurs engins,
- aux ingénieurs de bassin de répartir la production minière entre leurs différents puits
- aux *media planners* de répartir efficacement un budget de publicité entre différents supports

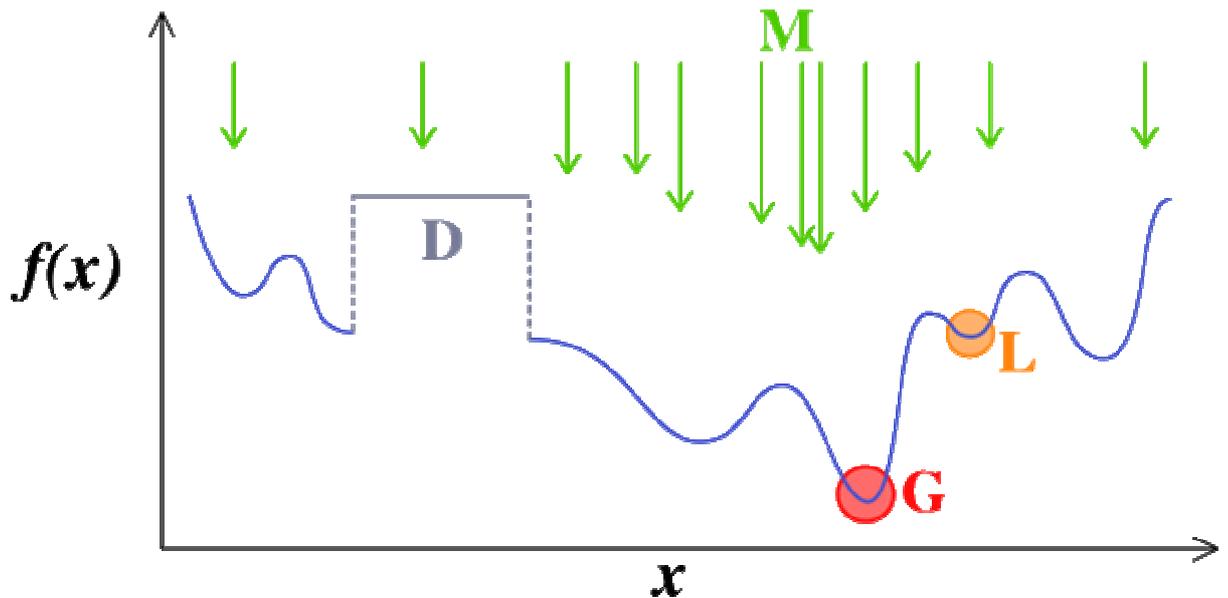
- **Heuristique**

*(du grec heuriskêin, « trouver ») est un terme de didactique qui signifie l'art d'inventer, de faire des découvertes (Littré). C'est en sociologie, une discipline qui se propose de dégager les règles de la recherche scientifique (Larousse)*

En *optimisation combinatoire*, *Théorie des graphes* et *Théorie de la complexité*, une **heuristique** est un *algorithme* qui fournit *rapidement* (en *temps polynomial*) une solution réalisable, pas nécessairement optimale, pour un problème d'optimisation NP-difficile. Une heuristique, où *méthode approximative*, est donc le contraire d'un *algorithme exact* qui trouve une solution optimale pour un problème donné. Les algorithmes de résolution exacts étant de complexité exponentielle, il est généralement plus judicieux de faire appel à des méthodes heuristiques pour des problèmes difficiles. On retiendra cependant que des méthodes de résolution exactes (comme le simplexe) sont de complexités exponentielles mais parfois plus efficaces en pratique qu'une méthode heuristique. L'usage d'une heuristique est pertinente pour calculer une solution approchée d'un problème et ainsi accélérer le processus de résolution exacte.

- **Métaheuristique**

Les **métaheuristiques** forment une famille d'algorithmes d'optimisation visant à résoudre des problèmes d'optimisation difficile (souvent issus des domaines de la recherche opérationnelle, de l'ingénierie ou de l'intelligence artificielle) pour lesquels on ne connaît pas de méthode classique plus efficace.



*Les métaheuristiques (M) sont souvent des algorithmes utilisant un échantillonnage probabiliste. Elles tentent de trouver l'optimum global (G) d'un problème d'optimisation difficile (avec des discontinuités — D —, par exemple), sans être piégé par les optima locaux (L).*

Pour les fonctions dérivables deux fois, des problèmes sans contraintes peuvent être résolus en trouvant les lieux où le gradient de la fonction est 0 (par exemple les points stationnaires) et en utilisant la *matrice hessienne* pour classer le type de point. Si le hessien est défini positif, le point est un minimum local ; s'il est défini négatif, un maximum local et s'il est indéfini c'est un « point-col ».

Si la fonction est convexe sur l'ensemble des solutions admissibles (définies par les contraintes) alors tout minimum local est aussi un minimum global. Des techniques numériques robustes et rapides existent pour optimiser des fonctions convexes doublement dérivables. En dehors de ces fonctions, des techniques moins efficaces doivent être employées.

Les problèmes à contraintes peuvent souvent être transformés en des problèmes sans contraintes à l'aide du *multiplicateur de Lagrange* : cette méthode revient en effet à introduire des pénalités croissantes à mesure qu'on se rapproche des contraintes. Un algorithme dû à *Hugh Everett* permet de mettre à jour de façon cohérente les valeurs des multiplicateurs à chaque itération pour garantir la convergence. Celui-ci a également généralisé l'interprétation de ces multiplicateurs pour les appliquer à des fonctions qui ne sont ni continues, ni dérivables. Le *lambda* devient alors juste un *coefficient de pénalité*.

De nombreuses techniques existent pour trouver un bon minimum local dans les problèmes d'optimisation non-linéaires avec plusieurs minimums locaux pauvres, elles sont généralement considérées comme des *métaheuristiques*.

### III.3.1. La programmation linéaire

La *programmation linéaire* étudie les cas où la frontière de l'ensemble A et la fonction objectif sont linéaires. C'est une méthode très employée pour établir les programmes des raffineries pétrolières, mais aussi pour déterminer la composition la plus rentable d'un mélange salé, sous contraintes, à partir des prix de marché du moment.

En mathématiques, les problèmes de **programmation linéaire** (PL) sont des problèmes d'optimisation où la fonction objective et les *contraintes* sont toutes *linéaires*. Néanmoins, la plupart des résultats présentés ici sont également vrais si l'objectif est une *fonction monotone* croissante de chaque variable considérée. La programmation linéaire désigne également la manière de résoudre les problèmes linéaires.

La programmation linéaire est un domaine central de l'optimisation, car les problèmes de PL sont les problèmes d'optimisation les plus faciles - toutes les contraintes y étant linéaires. Beaucoup de problèmes réels de *recherche opérationnelle* peuvent être exprimés comme un problème de PL. Pour cette raison un grand nombre d'algorithmes pour la résolution d'autres problèmes d'optimisation sont fondés sur la résolution de problèmes linéaires.

Le terme programmation linéaire suppose que les solutions à trouver doivent être représentées en variables réelles. S'il est nécessaire d'utiliser des variables discrètes dans la modélisation du problème, on parle alors de *programmation linéaire en nombres entiers* (PLNE). Il est important de savoir que ces derniers sont nettement plus *difficiles* à résoudre que les PL à variables continues.

Tous les programmes linéaires peuvent s'écrire sous la forme suivante:

$$\begin{aligned} \max z &= c^t x \\ \text{s.c. } Ax &\leq b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

Où c et x sont des vecteurs de taille n, b un vecteur de taille m, et A une matrice de taille mXn. Si on désigne cette représentation sous le terme de *forme primale*, on désigne alors sous

le terme de *forme duale* le problème suivant:

$$\begin{aligned} \min w &= b^t y \\ \text{s.c. } A^t y &\geq c \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

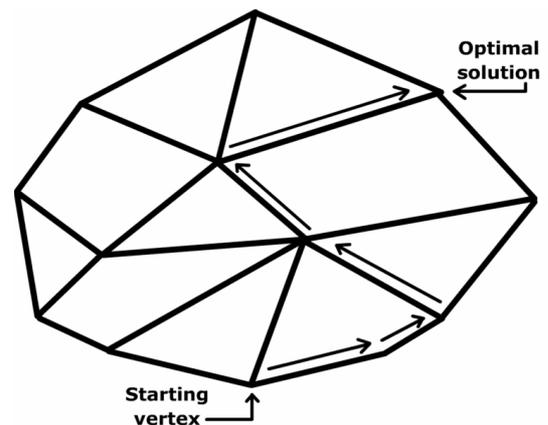
Où A, b et c sont les mêmes et y un vecteur de taille m. (*Les détails exacts des deux représentations varient beaucoup d'un ouvrage à l'autre*)

Les deux problèmes sont très fortement liés. Si l'un d'entre eux possède une solution optimale, alors l'autre aussi. De plus, les deux solutions ont alors la même valeur ( $w^*=z^*$ ). Si l'un d'entre eux est non-borné, l'autre ne possède pas de solution.

Outre son intérêt théorique, le problème dual possède de très intéressantes applications économiques. A chaque contrainte primale correspond une variable duale. La valeur de cette variable dans la solution optimale représente le **coût marginal** associé à la contrainte primale.

### *Algorithme du simplexe*

L'**algorithme du simplexe** de *George Dantzig* est une technique à la fois fondamentale et très populaire pour les problèmes de programmation linéaire. Ainsi, étant donné un ensemble d'inégalités linéaires sur  $n$  variables réelles, l'algorithme permet de trouver la solution optimale pour une fonction objectif, qui est elle aussi linéaire (l'algorithme fonctionne encore quand la fonction est croissante en chacune de  $n$  variables).



En termes géométriques, l'ensemble des inégalités linéaires définit un polytope dans l'espace à  $n$  dimensions (polygone en 2 dimensions et polyèdre en 3 dimensions) et il s'agit de trouver le sommet optimal pour la fonction de coût donnée. L'idée de l'algorithme consiste à partir d'un sommet quelconque du polytope et, à chaque itération, d'aller à un sommet adjacent s'il est possible d'en trouver un meilleur pour la fonction objectif. S'il n'y en a pas, l'algorithme s'arrête en concluant que le sommet courant est optimal. En général, il y a plusieurs sommets adjacents au sommet courant qui sont meilleurs pour l'objectif. Il faut en sélectionner un seul, la règle de sélection est appelée **règle de pivotage**.

Il a été montré pour les principales règles de pivotage employées que l'algorithme du simplexe pouvait prendre un temps de calcul exponentiel. En particulier, on ne sait pas s'il existe une règle de pivotage qui assurerait que l'algorithme se termine après un nombre polynomial d'étapes.

Néanmoins, l'algorithme du simplexe est très efficace en pratique et il est implémenté dans tous les solveurs de programmes linéaires. Les autres algorithmes de résolution de programmes linéaires sont basés soit sur la *méthode de l'ellipsoïde* soit sur la *méthode du point intérieur*

### III.3.2. Programmation linéaire en nombres entiers

La programmation linéaire en nombres entiers étudie les programmes linéaires dans lesquels certaines ou toutes les variables sont contraintes à prendre des valeurs entières. Ces problèmes peuvent être résolus par différentes méthodes: *séparation et évaluation, plans sécants*.

Un problème de programmation linéaire en nombres entiers (PLNE) n'est pas un programme linéaire dans le sens où son domaine de réalisabilité n'est pas un polyèdre mais un ensemble discret de points. Pourtant, on peut le décrire comme un PL auquel on ajoute la contrainte supplémentaire que certaines variables ne peuvent prendre que des valeurs entières. On distingue le *programme linéaire mixte* avec variables entières et continues du *programme entier* avec toutes ses variables entières.

La PLNE est un problème NP-complet car de nombreux problèmes NP-complets peuvent être exprimés comme des PLNE (par exemple trouver un stable dans un graphe  $G = (V, E)$  revient à trouver un vecteur  $x \in \{0, 1\}^E$  satisfaisant  $x_u + x_v \leq 1$  pour tout arête  $uv \in E$ ). Bien entendu, les algorithmes décrits ci-dessus pour la PL ne résolvent pas les problèmes de PLNE. Algorithmiquement donc, la résolution d'un PLNE est autrement plus difficile celle d'un PL qui joue pourtant un rôle crucial quant à leur résolution, principalement pour deux raisons. Premièrement, la relaxation continue d'un PLNE (c'est le PLNE sans les contraintes d'intégrité) est un PL qui peut être résolu efficacement et fournir ainsi une *borne duale* (dans le sens non-réalisable). Les algorithmes de résolution de PLNE, tels que les algorithmes par *séparation et évaluation* se basent sur cette relaxation continue pour diminuer au maximum l'énumération des solutions. Deuxièmement, le *théorème*

*Optimisation/Séparation* de *Grötschel, Lovasz et Schrijver* permet de résoudre en pratique par la PL les problèmes entiers dont on connaît une *bonne* description polyédrale (c'est-à-dire dont on peut séparer les contraintes en temps polynomial). C'est le principe de fonctionnement des algorithmes de plans sécants.

### III.3.3. Programmation quadratique

la programmation quadratique permet à la fonction objectif d'avoir des termes quadratiques, tout en conservant une description de l'ensemble A à partir d'égalités/inégalités linéaires

Les problèmes de **programmation quadratique** sont des problèmes d'optimisation où la fonction objective est quadratique et les contraintes sont linéaires. On inclut parfois le cas où les contraintes sont quadratiques.

#### *Formulation mathématique*

Soit  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ . Il s'agit de minimiser une fonction objective de la forme suivante:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n q_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^n c_i x_i$$

sous les contraintes:

$$g_k(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i \leq 0 \quad k \in 1 \dots m$$

Ce problème s'exprime sous forme matricielle:

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T Q \mathbf{x} + \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

$$g_k(\mathbf{x}) = A \mathbf{x} \leq 0 \quad k \in 1 \dots m$$

Q est une matrice symétrique. Dans le cas où elle est semi-définie positive, la fonction  $f$  est convexe et le problème a au moins une solution (s'il existe un point satisfaisant les contraintes). Si Q est définie positive,  $f$  est strictement convexe et il existe une unique solution.

### III.3.4. Programmation non-linéaire

La programmation non-linéaire étudie le cas général dans lequel l'objectif ou les contraintes (ou les deux) contiennent des parties non-linéaires

En informatique, la **programmation non-linéaire** (ou **NLP**, de l'anglais : *nonlinear programming*) est une méthode permettant de résoudre de nombreuses équations et inéquations dépendant d'un ensemble de paramètres - on parle de « contraintes » - sous la forme d'une fonction à maximiser ou à minimiser. Cette fonction ou l'ensemble de ses paramètres peuvent être non-linéaires.

#### *Formulation mathématique*

On a une fonction  $f : X \rightarrow R$ , avec  $X \subseteq R^n$ . L'objectif est de déterminer le réel  $x$  défini par :

$$x \in X; f(x) = \min_{x \in X} f(x)$$

De façon équivalente, on peut rechercher la valeur pour laquelle  $f$  est maximale :

$$x \in X; f(x) = \max_{x \in X} f(x)$$

#### *Méthodes de résolution*

Si la fonction est convexe ou concave, et l'ensemble des contraintes est convexe, alors il existe des méthodes spécialisées, appelées méthodes d'*optimisation convexe*.

Sinon, il existe plusieurs solutions. Par exemple, utilisant le principe de *séparation et évaluation* pour diviser et traiter séparément plusieurs paramètres.

L'algorithme peut également être arrêté avant d'aboutir, si on peut prouver qu'aucune solution ultérieure ne sera meilleure à un certain seuil de tolérance près. Les *conditions de Karush-Kuhn-Tucker* (KKT) garantissent qu'une solution ainsi obtenue est optimale.

#### *Exemples*

##### *En dimension 2*

L'intersection d'une ligne avec l'ensemble des contraintes représente la solution.

Un problème simple peut être posé ainsi :

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

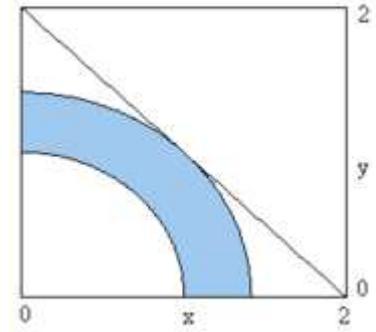
$$x_1^2 + x_2^2 \geq 1$$

$$x_1^2 + x_2^2 \leq 2$$

où l'on cherche à maximiser la fonction

$$f(\mathbf{x}) = x_1 + x_2$$

avec  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$



### En dimension 3

L'intersection de la surface avec l'espace des contraintes au centre représente la solution.

On peut formuler un problème ainsi :

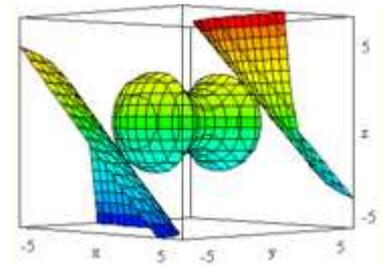
$$x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 \leq 2$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 10$$

où l'on cherche à maximiser la fonction :

$$f(\mathbf{x}) = x_1x_2 + x_2x_3$$

avec  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$



### III.3.5. La Heuristique

(du grec heuriskêin, « trouver ») est un terme de *didactique* qui signifie l'art d'inventer, de faire des découvertes (Littré). C'est en *sociologie*, une discipline qui se propose de dégager les règles de la recherche scientifique (Larousse)

En *optimisation combinatoire*, *Théorie des graphes* et *Théorie de la complexité*, une heuristique est un *algorithme* qui fournit rapidement (en *temps polynomial*) une solution réalisable, pas nécessairement optimale, pour un problème d'optimisation NP-difficile. Une heuristique, où méthode approximative, est donc le contraire d'un algorithme exact qui trouve une solution optimale pour un problème donné. Les algorithmes de résolution exacts étant de complexité exponentielle, il est généralement plus judicieux de faire appel à des méthodes heuristiques pour des problèmes difficiles. On retiendra cependant que des méthodes de

résolution exactes (comme le simplexe) sont de complexité exponentielle mais parfois plus efficaces en pratique qu'une méthode heuristique. L'usage d'une heuristique est pertinente pour calculer une solution approchée d'un problème et ainsi accélérer le processus de résolution exacte.

Généralement une heuristique est conçue pour un problème particulier, en s'appuyant sur sa structure propre, mais les approches peuvent contenir des principes plus généraux. On parle de métaheuristique pour les méthodes approximatives générales, pouvant s'appliquer à différents problèmes (comme le recuit simulé par exemple).

La qualité d'une heuristique peut s'évaluer selon deux critères scientifiques :

- Critère pratique, ou empirique : on implémente l'algorithme approximatif et on évalue la qualité de ses solutions par-rapport aux solutions optimales (ou aux meilleures solutions connues). Ceci passe par la mise en place d'un *benchmark* (ensemble d'instances d'un même problème accessible à tous).
- Critère mathématique : il faut démontrer que l'heuristique garantit des performances. La garantie la plus solide est celle des algorithmes approchés, sinon il est intéressant de démontrer une garantie probabiliste, lorsque l'heuristique fournit souvent, mais pas toujours, de bonnes solutions.

C'est un fait que ces deux critères peuvent être contradictoires. Un exemple frappant est celui du transversal minimum. L'algorithme 2-approché pour ce problème est dans une imposante majorité des cas nettement moins efficace que *l'heuristique des plus hauts degrés*. Celle-ci consiste à former une solution réalisable en sélectionnant à chaque itération le sommet couvrant un maximum de sommets. Cette heuristique peut pourtant fournir des solutions aussi mauvaises que l'on veut, dans le sens que pour tout  $\rho > 1$  on peut construire une instance pour laquelle l'heuristique donne une solution dont la valeur est supérieure à  $\rho$  fois celle de l'optimum.

Ironiquement, la principale difficulté de la résolution exacte d'un problème d'optimisation combinatoire est non pas de trouver une solution optimale, ce qui souvent arrive assez rapidement lors du processus de résolution, mais de **démontrer** qu'une solution est bien la meilleure possible, c'est-à-dire de réaliser que l'on a la solution optimale. Le critère mathématique est surtout important car l'information qu'il donne est exploitable dans un processus de résolution exacte. Par-exemple, si l'heuristique 2-approchée pour le transversal

minimum donne une solution réalisable de valeur 100, on sait que la valeur de la solution optimale est au minimum 50, on peut donc stopper un *processus d'énumération* (par-exemple séparation et évaluation) dès que l'on possède une solution réalisable atteignant cette borne. Dans ce contexte il devient motivant d'élaborer l'algorithme 2-approché le plus mauvais qui soit, donnant la solution la plus éloignée de l'optimum, pour prouver une meilleure borne. On utilise donc un couplage maximum, alors qu'un couplage maximal suffit, pour cette algorithme 2-approché.

### III.3.6. Les métaheuristiques

Les métaheuristiques sont généralement des algorithmes stochastiques itératifs, qui progressent vers un optimum global, c'est à dire l'extremum global d'une fonction, par échantillonnage d'une fonction objectif. Elles se comportent comme des algorithmes de recherche, tentant d'apprendre les caractéristiques d'un problème afin d'en trouver une approximation de la meilleure solution (d'une manière proche des algorithmes d'approximation).

Il existe un grand nombre de métaheuristiques différentes, allant de la simple recherche locale à des algorithmes complexes de recherche globale. Ces méthodes utilisent cependant un haut niveau d'abstraction, leur permettant d'être adaptées à une large gamme de problèmes différents.

#### *Terminologies*

On parle de *méta*, du grec « au-delà » (comprendre ici « à un plus haut niveau »), *heuristique*, du grec εὐρισκείν / *heuriskein*, qui signifie « trouver ». En effet, ces algorithmes se veulent des méthodes génériques pouvant optimiser une large gamme de problèmes différents, sans nécessiter de changements profonds dans l'algorithme employé.

Une terminologie légèrement différente considère que les **méta-heuristiques** sont une forme d'algorithmes d'optimisation stochastique, hybridés avec une recherche locale. Le terme *méta* est donc pris au sens où les algorithmes peuvent regrouper plusieurs heuristiques. On rencontre cette définition essentiellement dans la littérature concernant les algorithmes évolutionnaires, où elle est utilisée pour désigner une spécialisation. Dans le cadre de la

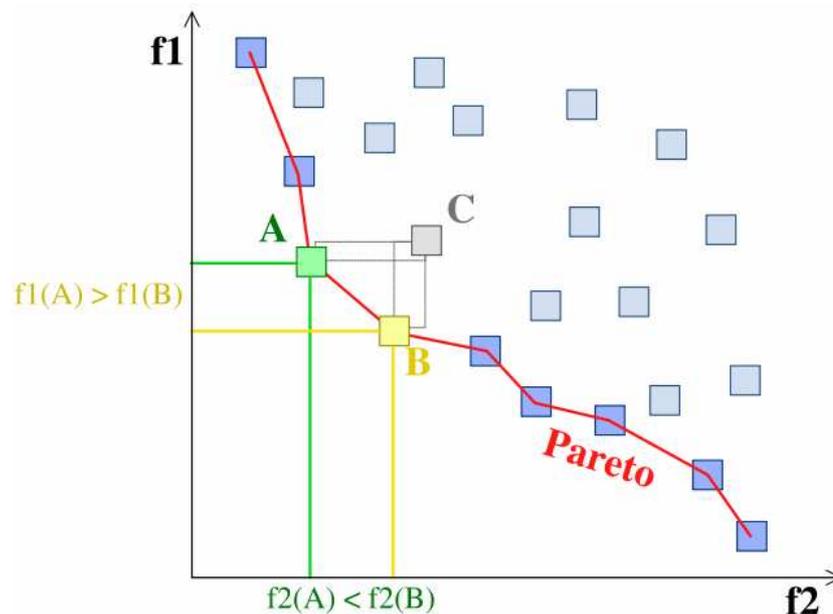
première terminologie, un algorithme évolutionnaire hybridé avec une recherche locale sera plutôt désigné sous le terme d'algorithme *mémétique*.

Les métaheuristiques sont souvent inspirées par des systèmes naturels, qu'ils soient pris en physique (cas du recuit simulé), en biologie de l'évolution (cas des algorithmes génétiques) ou encore en éthologie (cas des algorithmes de colonies de fourmis ou de l'optimisation par essais particuliers).

### *Nomenclature*

Le but d'une métaheuristique est de résoudre un problème d'optimisation donné : elle cherche un objet mathématique (une permutation, un vecteur, etc.) minimisant (ou maximisant) une *fonction objectif*, qui décrit la qualité d'une *solution* au problème.

L'ensemble des solutions possibles forme *l'espace de recherche*. L'espace de recherche est au minimum borné, mais peut être également limité par un ensemble de *contraintes*.



Exemple de front de Pareto dans un problème nécessitant la minimisation de deux objectifs ( $f_1$  et  $f_2$ ). Les points A et B sont « non dominés » alors que le point C n'est optimum pour aucun des objectifs.

Les métaheuristiques manipulent une ou plusieurs solutions, à la recherche de l'*optimum*, la meilleure solution au problème. Les itérations successives doivent permettre de passer d'une solution de mauvaise qualité à la solution optimale. L'algorithme s'arrête après

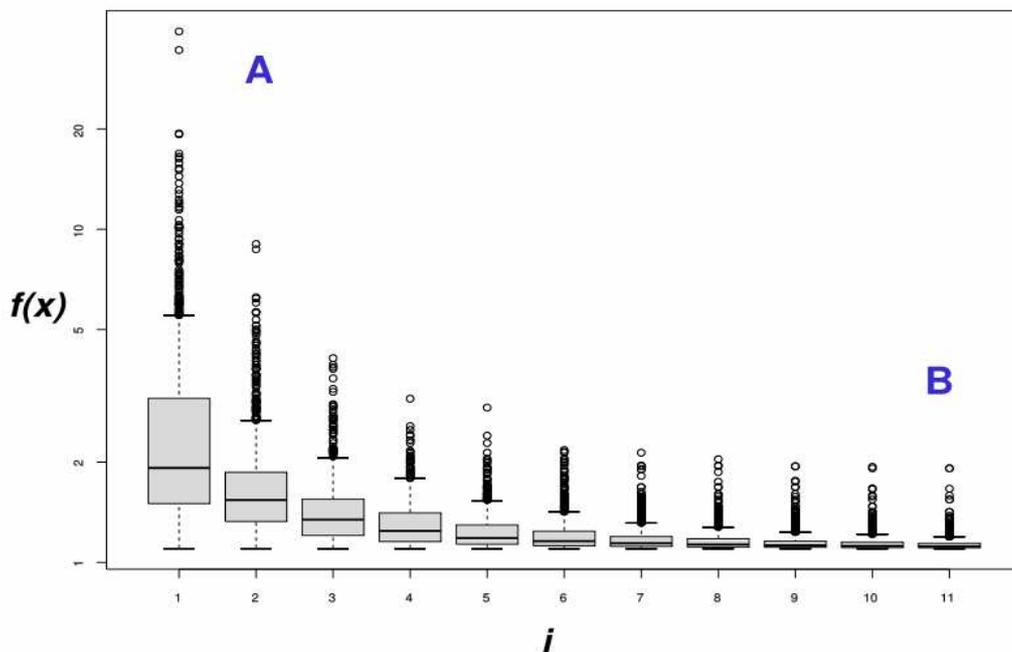
avoir atteint un *critère d'arrêt*, consistant généralement en l'atteinte du temps d'exécution imparti ou en une précision demandée.

Une solution ou un ensemble de solutions est parfois appelé un *état*, que la métaheuristique fait évoluer *via* des *transitions* ou des *mouvements*. Si une nouvelle solution est construite à partir d'une solution existante, elle est sa *voisine*. Le choix du *voisinage* et de la structure de donnée le représentant peut être crucial.

Lorsqu'une solution est associée à une seule valeur, on parle de problème *mono-objectif*, lorsqu'elle est associée à plusieurs valeurs, de problème *multi-objectifs* (ou *multi-critères*). Dans ce dernier cas, on recherche un ensemble de solutions *non dominées* (le « front de Pareto »), solutions parmi lesquelles on ne peut décider si une solution est meilleure qu'une autre, aucune n'étant systématiquement inférieure aux autres sur tous les objectifs.

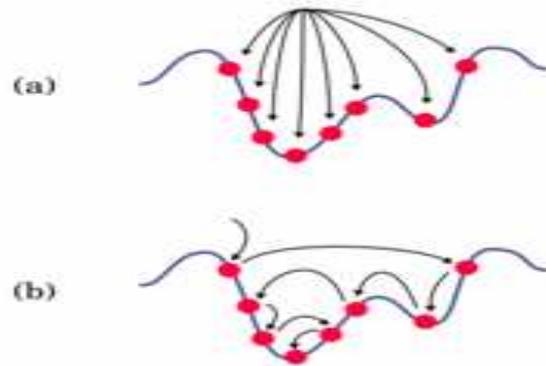
Dans certains cas, le but recherché est explicitement de trouver un ensemble d'optimums « satisfaisants ». L'algorithme doit alors trouver l'ensemble des solutions de bonne qualité, sans nécessairement se limiter au seul optimum : on parle de méthodes *multimodales*.

### Concepts généraux



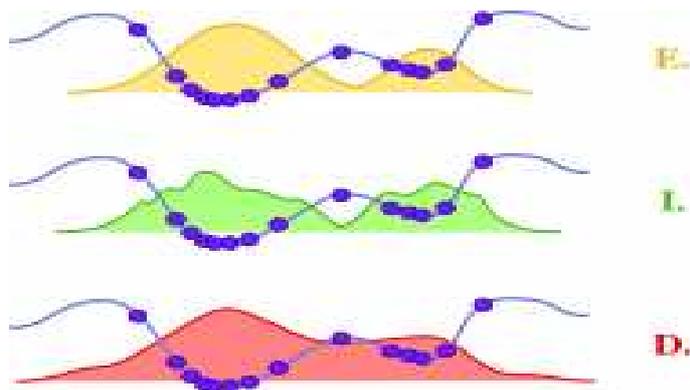
Comportement d'une métaheuristique. Le graphique représente les distributions des valeurs des optimums trouvés (sur un grand nombre d'exécutions) : l'algorithme passe d'une population de solution très dispersée (A) à une population plus centrée sur l'optimum trouvé (B).

*Parcours et population*



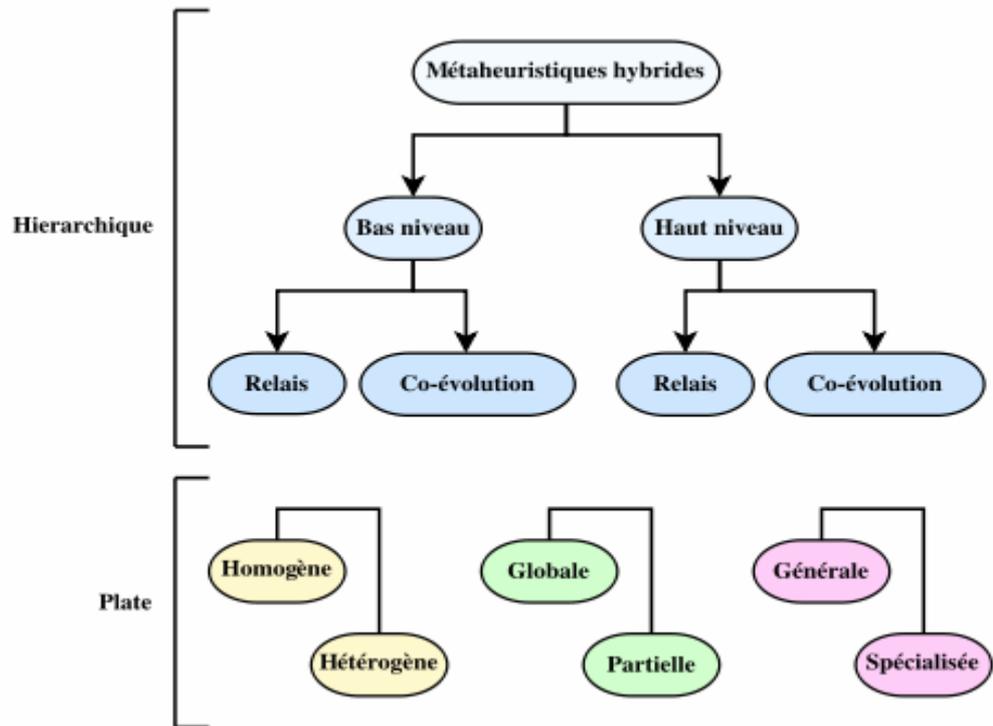
Principe général des métaheuristiques (a) à population, et (b) à parcours.

*Implicite, explicite, directe*



Les métaheuristiques peuvent être qualifiées d'explicites (E, ici sur une somme de deux gaussiennes), d'implicites (I) ou de directes (D), selon la façon dont elles gèrent la transition entre deux itérations

*Taxinomie de l'hybridation*

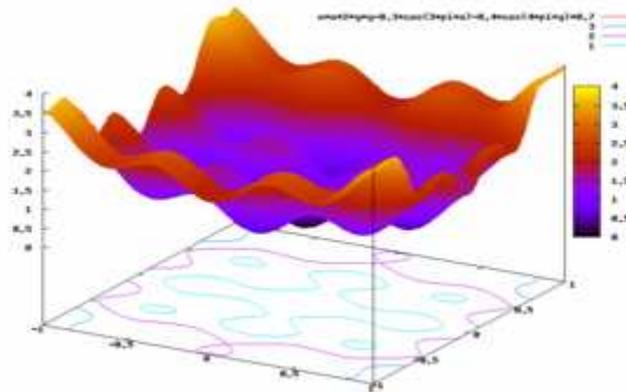


Taxinomie des métaheuristiques hybrides.

On parle d'hybridation quand la métaheuristique considérée est composée de plusieurs méthodes se répartissant les tâches de recherche. La taxinomie des métaheuristiques hybrides se sépare en deux parties : une classification *hiérarchique* et une classification *plate*. La classification est applicable aux méthodes déterministes aussi bien qu'aux métaheuristiques

La classification hiérarchique se fonde sur le niveau (bas ou haut) de l'hybridation et sur son application (en relais ou concurrente). Dans une hybridation de *bas niveau*, une fonction donnée d'une métaheuristique (par exemple, la mutation dans un algorithme évolutionnaire) est remplacée par une autre métaheuristique (par exemple une recherche avec tabou). Dans le cas du *haut niveau*, le fonctionnement interne « normal » des métaheuristiques n'est pas modifié. Dans une hybridation en *relais*, les métaheuristiques sont lancées les unes après les autres, chacune prenant en entrée la sortie produite par la précédente. Dans la concurrence (ou *co-évolution*), chaque algorithme utilise une série d'agents coopérants ensembles

### *Tests*



Exemple de problème test à minimiser (présenté ici pour deux variables)

### *Liste de métaheuristiques*

Les métaheuristiques les plus connues sont :

- Les algorithmes évolutionnistes, parmi lesquels :
  - les stratégies d'évolution,
  - les algorithmes génétiques,
  - les algorithmes à évolution différentielle,
  - les algorithmes à estimation de distribution,
  - les systèmes immunitaires artificiels,
  - la recombinaison de chemin (Path relinking en anglais)
- le recuit simulé,
- les algorithmes de colonies de fourmis,
- Les algorithmes d'optimisation par essaims particulaires,
- la recherche avec tabous,
- la méthode GRASP.

Il existe un très grand nombre d'autres métaheuristiques, plus ou moins connues :

- l'algorithme du kangourou,
- la méthode de Fletcher et Powell,
- la méthode du bruitage,
- la tunnelisation stochastique,

- l'escalade de collines à recommencements aléatoires,
- etc.

La recherche dans le domaine étant très active, il est impossible de produire une liste exhaustive des différentes métaheuristiques d'optimisation. La littérature spécialisée montre un grand nombre de variantes et d'hybridations entre méthodes, particulièrement dans le cas des algorithmes évolutionnaires.

#### III.4. Conclusion

En conclusion de chapitre on peut dire que les **algorithmes d'optimisation** cherchent à déterminer le jeu de paramètres d'entrée d'une fonction donnant à cette fonction la valeur maximale ou minimale. Cette optimisation peut se faire *sans contrainte* ou *sous contrainte*, le second cas se ramenant au premier dans le cas des fonctions dérivables par la méthode du multiplicateur de Lagrange (et des fonctions non dérivables par l'algorithme d'*Everett*).

Les méthodes de résolution d'un tel problème sont nombreuses. Mais selon le principe de base de chacune d'elles, elles sont totalement différentes. Chaque groupes de méthodes ayant sa propre technique de recherche, ses avantages et ses inconvénients

La comparaison de ces méthodes entre elles ne doit pas se faire seulement sur le résultat obtenue, mais aussi sur le coût (temps de calcul et complexité de l'algorithme) qu'engendre ces méthode pour résoudre ce problème.

Dans notre travail, nous avons étudié l'optimisation par la programmation non linéaire qui est aussi performante que les autres groupes de méthodes et qui engendre un coût, au sens temps de calcul et complexité d'algorithme, assez faible. Néanmoins elle a le problème du minimum local que nous tentons de le surmonter en balayant le domaine de recherche le plus largement possible.

---

**- CHAPITRE IV -**

**Optimisation Par La Programmation**

**Non Linéaire**

---

---

**CHAPITRE III : Optimisation Par La Programmation Non Linéaire**

---

**IV.1. Introduction:**

Le terme programmation non linéaire est utilisé pour classer les méthodes de la programmation mathématique qui optimisent les problèmes non linéaires.

C'est Kuhn et Tucker qui ont proposé le nom de programmation non linéaire pour l'étude des problèmes d'optimisation non linéaires avec ou sans contraintes.

Il existe plusieurs types de problèmes non linéaires et des méthodes spéciales ont été développées pour chacun de ces cas. Parmi ces méthodes nous pouvons citer par exemple :

- La méthode classique de descente et ses variations
- La méthode de la tangente parallèle
- la méthode de Powell
- La méthode de Fletcher et Reeves
- Les méthodes quasi-newtoniennes

Comme la fonction de coût est d'origine non linéaire, nous allons lui appliquer d'une manière directe la programmation non linéaire. Pour cela, nous allons étudier cinq méthodes mathématiques que nous appliquerons à la répartition économique des puissances actives dans un réseau d'énergie électrique.

## IV.2. Formulation mathématique du problème:

### IV.2.1. Introduction:

Généralement le problème de la programmation non linéaire peut être énoncé comme suit:

minimiser une fonction  $F(x)$  sous certaines contraintes par exemple:

$$\min F(x) \tag{4.1}$$

sous les contraintes suivantes:

$$g_i(x) > 0 \quad i = 1 \dots m$$

$$h_j(x) = 0 \quad j = 1 \dots p$$

où:

$g_i(x)$  est la contrainte de type inégalité

$h_j(x)$  est la contrainte de type égalité

$x$  est un vecteur à  $n$  dimensions

Il existe plusieurs algorithmes et programmes d'optimisation pour résoudre ce problème.

A l'heure actuelle, les méthodes les plus performantes de résolution des programmes mathématiques non contraints ou d'équations non linéaires semblent être les méthodes dites quasi-newtoniennes ou de métrique variable qui sont une extension très importante de la méthode classique de Newton.

### IV.2.2. Principe fondamental

Le principe de ces méthodes consiste essentiellement en une généralisation de la formule itérative de Newton:

$$x^{k+1} = x^k - \lambda_k [\nabla^2 f(x^k)]^{-1} \nabla f(x^k) \tag{4.2}$$

On a constaté que la limitation importante de la méthode de Newton consiste dans la restriction définie positive.

Une extension naturelle consiste à remplacer  $[\nabla^2 f(x^k)]^{-1}$  par une matrice  $H_k$  définie positive donnant la direction de déplacement à partir du gradient  $\nabla f(x^k)$  d'où la formule itérative du type:

$$x^{k+1} = x^k - \lambda_k H_k \nabla f(x^k) \quad (4.3)$$

$\lambda_k$  est choisie de façon à minimiser  $g(\lambda) = f(x^k + \lambda d_k)$  dans la direction  $d_k = -H_k \nabla f(x^k)$ .

### IV.2.3. Méthode de pénalité:

Les méthodes citées auparavant sont des méthodes de minimisation sans contraintes. Or notre problème est avec contrainte. C'est pour cette raison que nous allons utiliser une méthode basée sur la transformation du problème contraint en un problème auxiliaire non contraint où le minimum est le même que celui du problème original.

Des techniques de minimisation sans contraintes sont utilisées pour obtenir le minimum d'une fonction objective.

Carroll est le premier à avoir proposé une méthode que Fiacco et McCormick ont développé après. Cette méthode consiste en la minimisation de la fonction :

$$P(x, r_k) = F(x) + r_k \sum g_i^2(x) + (1/r_k) \sum h_j^2(x) \quad (4.4)$$

En commençant par une valeur  $x$  qui satisfait toutes les contraintes quand le minimum de  $P(x, r_1)$  est trouvé, une valeur  $r_2 < r_1$  est choisie et  $P(x, r_2)$  est minimisée.

A la limite quand  $k$  augmente, le minimum de  $P(x, r_k)$  et  $F(x)$  est le même.

Donc le problème qui se pose de la manière suivante :

minimiser  $F(x)$

avec les contraintes:

$$g_i(x) > 0$$

$$h_j(x) = 0$$

devient:

$$\text{minimiser } P(x, r_k)$$

avec

$$P(x, r_k) = F(x) + r_k \sum g_i^2(x) + (1/r_k) \sum h_j^2(x)$$

$r_k$  est une constante de réglage de calcul ou bien un coefficient de pénalité.

## IV.2 Méthode de Davidon-Fletcher-Powell:

Cette méthode qui est parmi celles qui ont été utilisées dans le dispatching économique, a été élaborée par Davidon-Fletcher-Powell que nous nommerons par la suite D.F.P repose sur le principe de la méthode de Newton. En effet, cette méthode consiste en une généralisation de la formule itérative de Newton:

$$x^{k+1} = x^k - \lambda_k [\nabla^2 f(x^k)]^{-1} \nabla f(x^k) \quad (4.5)$$

Nous pouvons remplacer la quantité  $[\nabla^2 f(x^k)]^{-1}$  par une matrice  $H_k$  définie positive donnant la direction de déplacement à partir du gradient  $\nabla f(x^k)$ , d'ou une formule itérative du type:

$$x^{k+1} = x^k - \lambda_k H_k \nabla f(x^k) \quad (4.6)$$

$\lambda_k$  est choisie de façon à minimiser  $g(\lambda) = f(x^k + \lambda d_k)$  dans la direction  $d_k = -H_k \nabla f(x^k)$

La matrice  $H_k$  est modifiée à chaque itération. Lorsqu'on applique la méthode à une fonction quelconque,  $H_k$  peut alors être considérée, à chaque instant, comme une approximation (définie positive) de l'inverse du Hessien de  $f$ . Il existe évidemment beaucoup de variantes possibles dans le choix de la mise à jour de la matrice. Généralement on impose la relation:

$$H_k \nabla f(x^k) - \nabla f(x^{k-1}) = x^k - x^{k-1} \quad (4.7)$$

**Algorithme de D.F.P:**

Cet algorithme utilise la formule de correction de rang 2 suivante:

$$H_{k+1} = H_k + \frac{\delta_k \cdot \delta_k^\tau}{\delta_k^\tau \cdot \delta_k} - \frac{H_k \cdot \delta_k \cdot \delta_k^\tau \cdot H_k}{\delta_k^\tau \cdot H_k \cdot \delta_k} \quad (4.8)$$

où le point  $x^{k+1}$  est obtenu à partir de  $x^k$  par déplacement dans la direction:

$$d_k = - H_k \nabla f(x^k)$$

et où :

$$\delta_k = x^{k+1} - x^k, \quad \gamma_k = \nabla f(x^{k+1}) - \nabla f(x^k) \quad (4.9)$$

- a)  $x^0$  point de départ. Choisir  $H_0$  définie positive quelconque (par exemple la matrice unité) :  $k=0$ .
- b) A l'itération  $k$  ; déterminer la direction de déplacement

$$d_k = - H_k \nabla f(x^k) \quad (4.10)$$

déterminer  $x^{k+1}$  comme le minimum de  $f(x^k + \sigma d_k)$  pour  $\sigma \geq 0$

poser:

$$\delta_k = x^{k+1} - x^k$$

calculer:

$$\gamma_k = \nabla f(x^{k+1}) - \nabla f(x^k)$$

puis:

$$H_{k+1} = H_k + \frac{\delta_k \cdot \delta_k^\tau}{\delta_k^\tau \cdot \delta_k} - \frac{H_k \cdot \gamma_k \cdot \gamma_k^\tau \cdot H_k}{\gamma_k^\tau \cdot H_k \cdot \gamma_k} \quad (4.11)$$

c)  $k \longleftarrow k+1$

Test d'arrêt ou retour en b).

### IV.3 Méthode de Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno:

Cette deuxième méthode qui repose sur le même principe que la première a été développée indépendamment par Broyden (1970), Fletcher (1970), Goldfarb (1970) et Shanno (1969) que nous nommerons par la suite B.F.G.S. et qui a été déjà utilisée dans la résolution du problème de la répartition économique des puissances actives dans un réseau d'énergie électrique. Elle utilise pour construire une approximation de l'inverse du hessien, une formule de correction 2 directement dérivée de la formule (4.8). Nous savons que la matrice  $H_{k+1}$  obtenue par la relation (4.8) vérifie la relation :

$$H_{k+1} \cdot \gamma_k = \delta_k \quad (4.12)$$

Si l'on intervertit les rôles de  $\delta_k$  et de  $\gamma_k$  dans la relation (4.8) et que l'on considère la suite des matrices définies par  $G_0$  symétrique définie positive quelconque :

$$G_{k+1} = G_k + \frac{\gamma_k \cdot \gamma_k^\tau}{\gamma_k^\tau \cdot \delta_k} - \frac{G_k \cdot \delta_k \cdot \delta_k^\tau \cdot G_k}{\gamma_k^\tau \cdot G_k \cdot \delta_k} \quad (4.13)$$

les matrices obtenues vérifient la relation << inverse >> de la relation 3.12):

$$G_{k+1} \cdot \delta_k = \gamma_k \quad (4.14)$$

Si on prend l'inverse des deux membres de la relation (4.13), le calcul donne:

$$[G_{k+1}]^{-1} = [G_k]^{-1} + \left[1 + \frac{\gamma_k^T [G_k]^{-1} \gamma_k}{\delta_k^T \gamma_k}\right] \cdot \frac{\delta_k \cdot \delta_k^T}{\delta_k^T \gamma_k} - \frac{\delta_k \cdot \gamma_k^T [G_k]^{-1} + [G_k]^{-1} \gamma_k \cdot \delta_k^T}{\delta_k^T \gamma_k} \quad (4.15)$$

On voit que la relation (4.15) permet d'exprimer directement  $[G_{k+1}]^{-1}$  en fonction de  $[G_k]^{-1}$ , d'où la formule de correction:

$$H_{k+1} = H_k \left[1 + \frac{\gamma_k^T H_k \gamma_k}{\delta_k^T \gamma_k}\right] \cdot \frac{\delta_k \cdot \delta_k^T}{\delta_k^T \gamma_k} - \frac{\delta_k \cdot \gamma_k^T H_k + H_k \gamma_k \cdot \delta_k^T}{\delta_k^T \gamma_k} \quad (4.16)$$

L'algorithme de B.F.G.S se déduit alors directement de l'algorithme de D.F.P en remplaçant la formule (4.8) par la formule (4.16)

#### IV.4 Méthode de Broyden:

Cette méthode est basée également comme les précédentes sur le principe de la méthode itérative de Newton.

Le principe de cette méthode consiste essentiellement en une généralisation de la formule itérative de Newton :

$$P(X) = P(X^k) + \nabla^T P(X^k) (X - X^k) + \frac{1}{2} (X - X^k)^T \nabla^2 P(X^k) (X - X^k) \quad (4.17)$$

posons :

$$\delta X^k = X^{k+1} - X^k \quad (4.18)$$

$$X^{k+1} = X^k + \delta X^k \quad (4.19)$$

L'équation (4.17) devient :

$$\nabla^T P(X^k) \delta X^k + \frac{1}{2} \frac{1}{(\delta X^k)^T} \nabla^2 P(X^k) \delta X^k = 0 \quad (4.20)$$

$$P(X^{k+1}) = P(X^k) + \nabla^T P(X^k) \delta X^k + \frac{1}{2} (\delta X^k)^T \nabla^2 P(X^k) \delta X^k \quad (4.21)$$

le minimum de  $P(x)$  est obtenu lorsque  $P(x^{k+1}) = P(x^k)$ . Ce qui nous donne:

$$\nabla^T P(X^k) \delta X^k + \frac{1}{2} (\delta X^k)^T \nabla^2 P(X^k) \delta X^k = 0 \quad (4.22)$$

ce qui permet d'écrire que:

$$\delta X^k = - [\nabla^2 P(X^k)]^{-1} \nabla P(X^k) \quad (4.23)$$

introduisons l'équation (4.23) dans l'équation (4.19) pour transiter de l'itération  $X^k$  à  $X^{k+1}$  :

$$X^{k+1} = X^k - [\nabla^2 P(X^k)]^{-1} \nabla P(X^k) \quad (4.24)$$

notons que  $\nabla^2 P(X^k) = H$  où  $H$  est la matrice Hessienne. Ainsi l'équation (4.24) devient :

$$X^{k+1} = X^k - H^{-1}(X^k) \nabla P(X^k) \quad (4.25)$$

posons:

$$S^k = - H^{-1}(X^k) \nabla P(X^k) \quad (4.26)$$

où  $S^k$  est la direction de recherche. On peut généraliser la formule itérative de Newton comme suit :

$$X^{k+1} = X^k + \lambda^k S^k \quad (4.27)$$

où  $\lambda^k$  est choisie pour accélérer la convergence dans la direction de recherche.

### **Algorithme de résolution :**

- 1) Choisir des valeurs initiales à l'itération  $k = 0$
- 2) Etablir  $\mu^{(0)}$
- 3) Evaluer  $S^k = - \mu^k \cdot G^k$
- 4)  $X^{k+1} = X^k + \lambda^k S^k$
- 5) Calculer  $\Delta X^k = X^{k+1} - X^k$
- 6) Calculer  $\Delta G^k = G^{k+1} - G^k$
- 7)  $\mu^{k+1} = \mu^k + \Delta \mu^k$
- 8)  $k = k+1$
- 9) Test d'arrêt sinon retour au point 3).

### IV.5 Méthode des moindres carrés:

Cette méthode a été déjà décrite dans la littérature et appliquée à bien des domaines de calcul optimal et de résolution des problèmes. Nous allons néanmoins l'utiliser à la répartition économique des puissances actives dans un réseau d'énergie électrique afin de pouvoir comparer les résultats trouvés avec ceux trouvés par les autres méthodes.

#### Illustration de la méthode des moindres carrés

La **méthode des moindres carrés**, indépendamment élaborée par Legendre en 1805 et Gauss en 1809, permet de comparer des données expérimentales, généralement entachées d'erreurs de mesure à un modèle mathématique censé décrire ces données.

Ce modèle peut prendre diverses formes. Il peut s'agir de lois de conservation que les quantités mesurées doivent respecter. La méthode des moindres carrés permet alors de minimiser l'impact des erreurs expérimentales en « ajoutant de l'information » dans le processus de mesure.

Dans le cas le plus courant, le modèle théorique est une famille de fonctions  $f(x;\theta)$  d'une ou plusieurs variables muettes  $x$ , indexées par un ou plusieurs paramètres  $\theta$  inconnus. La méthode des moindres carrés permet de sélectionner parmi ces fonctions, celle qui reproduit le mieux les données expérimentales. On parle dans ce cas d'**ajustement par la méthode des moindres carrés**. Si les paramètres  $\theta$  ont un sens physique la procédure d'ajustement donne également une estimation indirecte de la valeur de ces paramètres.

La méthode consiste en une prescription (initialement empirique) qui est que la fonction  $f(x;\theta)$  qui décrit « le mieux » les données est celle qui minimise la somme quadratique des déviations des mesures aux prédictions de  $f(x; \theta)$ . Si par exemple, nous disposons de  $N$  mesures,  $(y_i)_{i=1, N}$  les paramètres  $\theta$  « optimaux » au sens de la méthode des moindres carrés sont ceux qui minimisent la quantité :

$$S(\theta) = \sum_{i=1}^N (y_i - f(x_i; \theta))^2 = \sum_{i=1}^N r_i^2(\theta)$$

où les  $r_i(\theta)$  sont les *résidus* au modèle, i.e. les écarts entre les points de mesure  $y_i$  et le modèle  $f(x;\theta)$ .  $S(\theta)$  peut être considéré comme une mesure de la *distance* entre les données

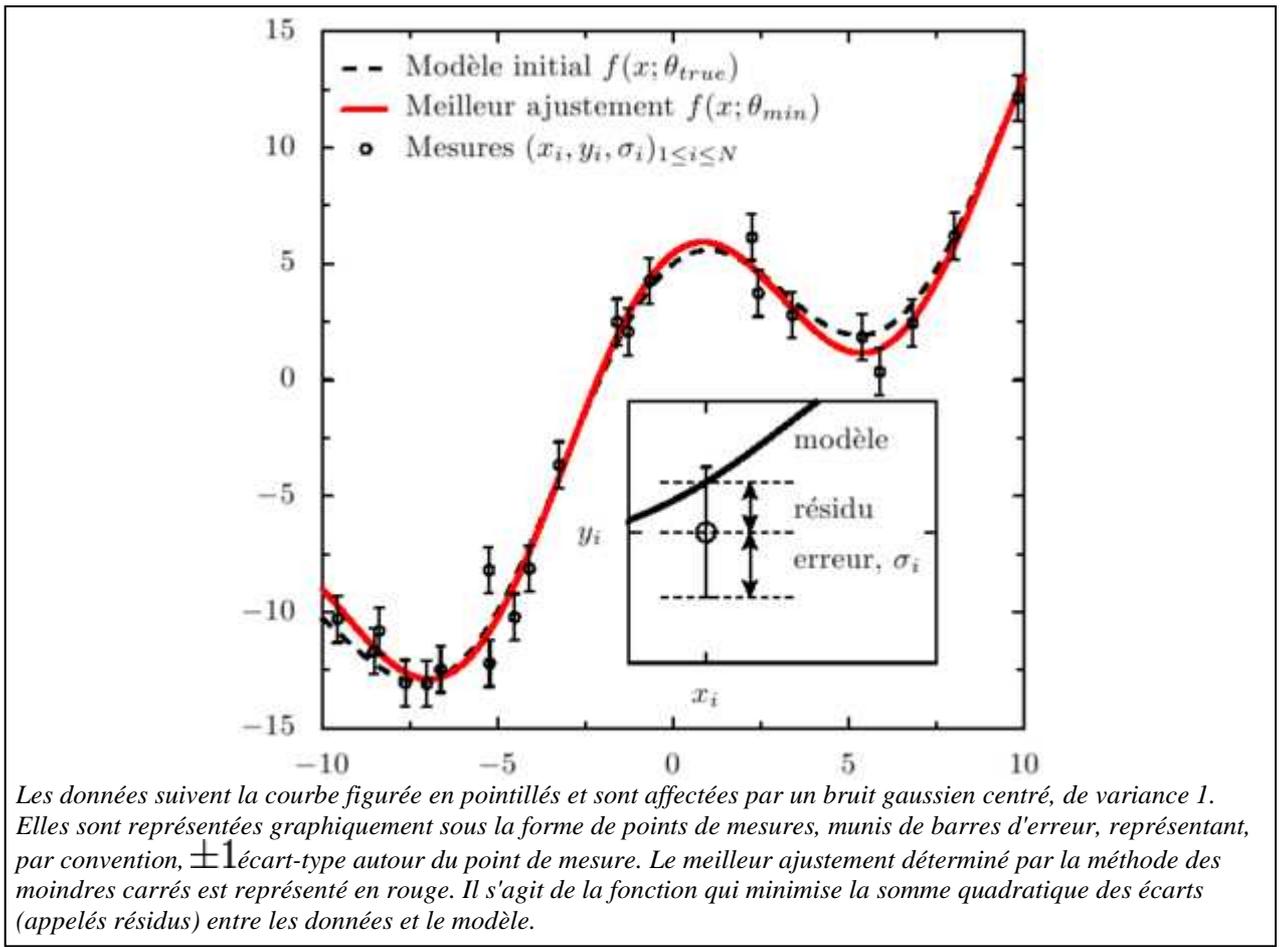
expérimentales et le modèle théorique qui prédit ces données. La prescription des moindres carrés commande que cette distance soit minimale.

Si, comme c'est généralement le cas, on dispose d'une estimation de l'écart-type  $\sigma_i$  du bruit qui affecte chaque mesure  $y_i$ , on l'utilise pour « peser » la contribution de la mesure au  $\chi^2$ . Une mesure aura d'autant plus de poids que son incertitude sera faible:

$$\chi^2(\theta) = \sum_{i=1}^N \left( \frac{y_i - f(x_i; \theta)}{\sigma_i} \right)^2 = \sum_{i=1}^N w_i (y_i - f(x_i; \theta))^2$$

Les quantités  $w_i$ , inverses des variances des mesures sont appelés *poids* des mesures. La quantité ci-dessus est appelée **khi carré** ou **khi-deux**. Son nom vient de la loi statistique qu'elle décrit, si les erreurs de mesure qui entachent les  $y_i$  sont distribuées suivant une Loi normale (ce qui est très courant). Dans ce dernier cas, la méthode des moindres carrés permet de plus d'estimer quantitativement l'adéquation du modèle aux mesures, pour peu que l'on dispose d'une estimation fiable des erreurs  $\sigma_i$ . Si le modèle d'erreur est non gaussien, il faut généralement recourir à la méthode du maximum de vraisemblance, dont la méthode des moindres carrés est un cas particulier.

Son extrême simplicité fait que cette méthode est très couramment utilisée de nos jours en sciences expérimentales. Une application courante est le *lissage* des données expérimentales par une fonction empirique (fonction linéaire, polynomes ou splines). Cependant son usage le plus important est probablement la mesure de quantités physiques à partir de données expérimentales. Dans de nombreux cas, la quantité que l'on cherche à mesurer n'est pas observable et n'apparaît qu'indirectement comme paramètre  $\theta$  d'un modèle théorique  $f(x, \theta)$ . Dans ce dernier cas de figure, il est possible de montrer que la méthode des moindres carrés permet de construire un estimateur de  $\theta$ , qui vérifie certaines conditions d'optimalité. En particulier, lorsque le modèle  $f(x, \theta)$  est linéaire en fonction de  $\theta$ , le Théorème de Gauss-Markov garantit que la méthode des moindres carrés permet d'obtenir l'estimateur non-biaisé le moins dispersé. Lorsque le modèle est une fonction non-linéaire des paramètres  $\theta$  l'estimateur est généralement biaisé. Par ailleurs, dans tous les cas, les estimateurs obtenus sont extrêmement sensibles aux points aberrants : on traduit ce fait en disant qu'ils sont non robustes. Plusieurs techniques permettent cependant de « robustifier » la méthode.



**Modélisation du problème d'OPF par la méthode des moindres carrés**

Soit la fonction suivante :

$$P(x) = \sum P_i^2 \tag{4.28}$$

Dans le cas de la méthode des Moindres Carrés, on a:

$$P(X) = 2 J^T(X) P(X) \tag{4.29}$$

où  $P(x)$  est un vecteur dont les composants sont les  $P_i$ .

$$J(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_1}{\partial x_1} & \frac{\partial P_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial P_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial P_2}{\partial x_1} & \frac{\partial P_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial P_2}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial P_m}{\partial x_1} & \frac{\partial P_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial P_m}{\partial x_m} \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

Pour avoir le minimum, il faut que le gradient de P soit nul pour l'état initial x. Ce dernier est différent de zéro, c'est pourquoi x doit subir une variation  $\delta X$  qui réduit la valeur du gradient de P et en substituant x par  $x+\delta X$ , l'équation (4.29) devient:

$$\nabla P(X + \delta X) = 2 J^T(X + \delta X) P(X + \delta X)$$

$$\nabla P(X + \delta X) = 2 J^T(X) P(X + \delta X) \quad (4.31)$$

pour déterminer  $\delta X$ ; on a utilisé le développement de Taylor et on retient que le premier terme de ce développement:

$$P(X + \delta X) = P(X) + \sum \frac{\partial P}{\partial X_k} \delta X_k \quad (4.32)$$

Cette approximation peut être écrite comme suit en utilisant la définition du Jacobien dans la relation (4.31):

$$P(x + \delta X) = P(x) + J(x).\delta X \quad (4.33)$$

remplaçons (4.33) dans (4.31) et faisant  $\nabla P(X + \delta X) = 0$ .

on a:

$$2 J^T(x).[P(x) + J(x).\delta X] = 0 \quad (4.34)$$

d'où:

$$J^T(x).J(x) \delta X = - J^T(x).P(x) \quad (4.35)$$

posons:

$$A = J^T(x).J(x) \text{ et } C = - J^T(x).P(x)$$

donc pour un procédé itératif la formulation est:

$$P(x^{k+1}) = P(x^k) + J(x^k).(x^{k+1} - x^k)$$

$$x^{k+1} = x^k - [ J^T(x^k).J(x) ]^{-1} J^T(x^k).P(x^k)$$

$$x^{k+1} = x^k - A^{-1}. C$$

**Algorithme de résolution :**

- 1) Choisir un état initial  $X^0$  pour l'itération  $k=0$
- 2) Evaluer  $J(x)$  ainsi que  $J^T(x)$
- 3) Evaluer  $P(x)$
- 4) Calcul de  $A$
- 5) Calcul de  $C$
- 6) Détermination de  $\delta X = A^{-1}.C$
- 7)  $x = x + \delta X$
- 8) Test sur la fonction  $P(x, R_k)$
- 9) Si le test est vérifié alors arrêt
- 10)  $k = k+1$
- 11) Retour au point 2

#### IV.6 Méthode de Pearson :

Cette méthode repose également sur le même principe déjà décrit pour les trois premières méthodes. Elle a été décrite et développée par Pearson.

Soit une fonction  $f(x)$  et son développement en série de Taylor.

Pour minimiser cette fonction  $f(x)$ , nous avons utilisé une nouvelle méthode de programmation non linéaire comme nous l'avons déjà souligné et qui est la méthode de Pearson.

Le principe de cette méthode consiste essentiellement en une généralisation de la formule itérative de Newton:

$$f(x) = f(x^k) + \nabla^T f(x^k)(x - x^k) + \frac{1}{2}(x - x^k)^T \nabla^2 f(x^k)(x - x^k) \quad (4.36)$$

A la  $(k+1)$ ème itération, nous pouvons affirmer que:

$$f(x^{k+1}) \approx f(x^k) + \nabla^T f(x^k)(x^{k+1} - x^k) + \frac{1}{2}(x^{k+1} - x^k)^T \nabla^2 f(x^k)(x^{k+1} - x^k) \quad (4.37)$$

Le minimum de  $f(x)$  est obtenu lorsque:

$$f'(x^{k+1}) = f'(x) \quad (4.38)$$

comme conséquence de l'équation (4.38) on a :

$$\nabla^T f(x^k)(x^{k+1} - x^k) + \frac{1}{2}(x^{k+1} - x^k)^T \nabla^2 f(x^k)(x^{k+1} - x^k) = 0 \quad (4.39)$$

ce qui permet d'écrire que:

$$x^{k+1} = x^k - [\nabla^2 f(x^k)]^{-1} \nabla f(x^k) \quad (4.40)$$

posons :

$$\nabla^2 f(x^k) = H \quad (4.41)$$

où  $H$  est la matrice hessienne. L'équation (4.40) devient:

$$x^{k+1} = x^k - H^{-1}(x^k) \nabla f(x^k) \quad (4.42)$$

posons:

$$S^k = - H^{-1}(x^k) \nabla f(x^k) \quad (4.43)$$

où  $S^k$  est la direction de recherche.

On peut généraliser la formule itérative de Newton comme suit:

$$x^{k+1} = x^k + \lambda^k S^k \quad (4.44)$$

où  $\lambda^k$  est choisi pour accélérer la convergence dans la direction de recherche:

$$\lambda^k = \frac{\nabla^T f(x^k) S^k}{(S^k)^T \nabla^2 f(x^k) S^k} \quad (4.45)$$

Notons que  $H^{-1}(x^k)$  est définie positive. L'équation (4.44) peut s'écrire:

$$x^{k+1} = x^k - \lambda^k \eta(x^k) \nabla f(x^k) \quad (4.46)$$

où :

$\eta(x^k)$  est une approximation de  $H^{-1}(x^k)$  et est modifiée à chaque itération.

Une autre formule utile qui lie  $x^{k+1}$  à  $x^k$  est :

$$x^{k+1} - x^k = \eta(x^k) [\nabla f(x^{k+1}) - \nabla f(x^k)] \quad (4.47)$$

posons:

$$\Delta g^k = \nabla f(x^{k+1}) - \nabla f(x^k) \quad (4.48)$$

$$H^{-1}(x^{k+1}) \approx \omega \cdot \eta^{k+1} = \omega \cdot (\eta^k + \Delta \eta^k) \quad (4.49)$$

Dans l'itération  $x^{k+1}$ , on connaît  $x^k$ ,  $\nabla f(x^k)$ ,  $\nabla f(x^{k+1})$  et  $\eta^k$  et on doit calculer  $\eta^{(k+1)}$  :

$$\eta^{(k+1)} \Delta g^k = \frac{1}{\omega} \Delta x^k \quad (4.50)$$

soit:

$$\Delta \eta^k = \eta^{(k+1)} - \eta^k \quad (4.51)$$

$$\Delta \eta^k \Delta g^k = \frac{1}{\omega} \Delta x^k - \eta^k \Delta g^k \quad (4.52)$$

d'où:

$$\Delta\eta^k = \frac{1}{\omega} \frac{\Delta x^k}{\Delta g^k} - \frac{\eta^k \Delta g^k}{\Delta g^k} \quad (4.53)$$

d'où:

$$\Delta\eta^k = \frac{1}{\omega} \frac{\Delta x^k y^T}{y^T \Delta g^k} - \frac{\eta^k \Delta g^k z^T}{z^T \Delta g^k} \quad (4.54)$$

Pearson pour la procédure de résolution a pris pour y et z les valeurs suivantes:

$$y = z = \Delta x^k$$

en prenant:  $\omega = 1$

$\Delta\eta^k$  devient:

$$\Delta\eta^k = \frac{(\Delta x^k - \eta^k \Delta g^k)(\Delta x^k)^T}{(\Delta x^k)^T (\Delta g^k)} \quad (4.55)$$

par suite:

$$\eta^{(k+1)} = \eta^k + \Delta\eta^k$$

### Algorithme de résolution:

- 1)  $k = 0$
- 2)  $x^0$
- 3)  $\eta^0 = I_d$
- 4) calcul de  $S^k$
- 5)  $x^{k+1} = x^k + \lambda^k S^k$
- 6) calcul de  $\Delta x^k$  et  $\Delta g^k$
- 7) calcul de  $\Delta\eta^k$
- 8) établir  $\eta^{(k+1)}$
- 9)  $k = k + 1$
- 10) test d'arrêt sinon retour au point 2

---

**- CHAPITRE V -**  
**Application**

---

---

**CHAPITRE V : Application**

---

**V.1 Introduction :**

Les méthodes décrites dans le chapitre précédent, à savoir :

- Méthode de Davidon-Fletcher-Powell
- Méthode de Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno
- Méthode de Broyden
- Méthode de Pearson
- Méthode des Moindres Carrés

vont être testées dans le calcul de l'écoulement de puissance optimal (OPF) sur des réseaux électriques de petite et moyenne taille.

Nous utiliserons, pour cela, comme exemple deux réseaux électriques : le réseau électrique algérien daté de 1997 de 25 noeuds et le réseau standard A.E.P 14 noeuds.

Les résultats obtenus vont être comparés entre les cinq méthodes elles même plus une comparaison pour le réseau 25 noeuds, avec le résultat de la méthode ACO, disponible dans le cadre d'un autre travail.

Nous supposons que les pertes sont variables et fonction linéaire des puissances générées.

Le problème avec contraintes et transformé en un problème sans contraintes par la méthode de pénalité, selon la forme suivante :

$$P(x, r_k) = F(x) + r_k \sum g_i^2(x) + (1/r_k) \sum h_j^2(x)$$

Dans l'application, le paramètre  $r_k$  a été varié entre les valeurs 0,25 à 1,25. La valeur qui nous a donné satisfaction est 1,12.

Les programmes ont été réalisés dans le langage de programmation DELPHI (basé sur dans son noyau le langage Pascal) avec une précision de 0.001

## V.2 Présentation des données du réseau d'Application 25 noeuds

L'application a été testée sur le réseau électrique algérien daté de 1997 de 25 noeuds dont le schéma est représenté par la figure 4.1.

Les caractéristiques des cinq noeuds de production sont :

Noeud	$P_{gi}$ (MW)		Coefficients de coût		
	Min	Max	a	b	C
1	100	300	0.0015	1.8	40
2	80	150	0.0030	1.7	60
3	80	200	0.0012	2.1	100
4	20	100	0.0080	2.0	25
5	100	300	0.0010	1.9	120

*Caractéristiques des noeuds de production - réseau d'Application 25 noeuds*

Cela nous donne les équations de coûts, des cinq noeuds de production, comme suit :

$$F_1(P_{G1}) = 0.0015P_{G1}^2 + 1.8P_{G1} + 40$$

$$F_2(P_{G2}) = 0.0030P_{G2}^2 + 1.7P_{G2} + 60$$

$$F_3(P_{G3}) = 0.0012P_{G3}^2 + 2.1P_{G3} + 100$$

$$F_4(P_{G4}) = 0.0080P_{G4}^2 + 2.0P_{G4} + 25$$

$$F_5(P_{G5}) = 0.0010P_{G5}^2 + 1.9P_{G5} + 120$$

avec les contraintes suivantes:

$$100 \leq P_{G1} \leq 300$$

$$80 \leq P_{G2} \leq 150$$

$$80 \leq P_{G3} \leq 200$$

$$20 \leq P_{G4} \leq 100$$

$$100 \leq P_{G5} \leq 300$$

$$\sum C_k = 530 \text{ MW (somme des puissances demandées)}$$

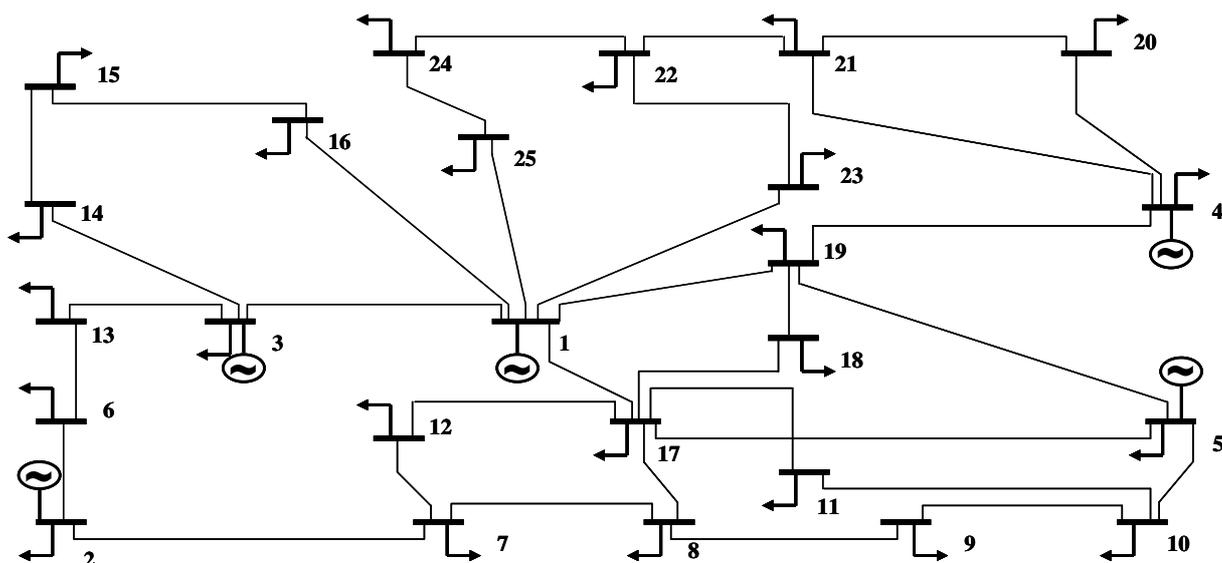


Figure 4.1 : Schéma simplifié du réseau d'Application 25 noeuds

Les caractéristiques du réseau et les valeurs planifiées des puissances sont données par les tableaux suivants :

Nœud		impédance		admittance shunt
K	m	R	X	
1	3	0.0720	0.2876	0.01790
1	16	0.0290	0.1379	0.03370
1	17	0.1012	0.2799	0.01440
1	19	0.1407	0.0097	0.03790
1	23	0.1015	0.2245	0.08730
1	25	0.0759	0.3593	0.01860
2	6	0.0617	0.2935	0.01550
2	7	0.0511	0.2442	0.01750
3	8	0.0579	0.2763	0.01850
3	13	0.0564	0.1475	0.01850
3	14	0.1183	0.3573	0.01130
4	19	0.0196	0.0514	0.02200
4	20	0.0382	0.1007	0.05580
5	21	0.0970	0.2547	0.00577
5	10	0.0497	0.2372	0.13350
5	17	0.0144	0.1269	0.01400
5	19	0.0929	0.2442	0.01400
6	13	0.0263	0.0691	0.00400

Nœud		impédance		admittance shunt
K	m	R	X	
7	8	0.0529	0.1465	0.00780
7	12	0.0364	0.1736	0.01100
8	9	0.0387	0.1847	0.01100
9	17	0.0407	0.2075	0.01180
9	10	0.0970	0.2091	0.09000
10	11	0.0890	0.2859	0.01370
11	17	0.1068	0.2807	0.01610
12	17	0.0460	0.2196	0.01390
14	15	0.0281	0.0764	0.00440
15	16	0.0256	0.0673	0.01480
17	18	0.0806	0.2119	0.01220
18	19	0.0872	0.2294	0.01320
20	21	0.0615	0.1613	0.03540
21	22	0.0414	0.1087	0.02380
22	23	0.2250	0.3559	0.01690
22	24	0.0970	0.2595	0.05670
24	25	0.0472	0.1458	0.03170

Caractéristiques du réseau d'Application 25 noeuds

N°	Type	P (MW)	Q (Mvar)	P (MW)	Q (Mvar)
1	bilan	0	0	0	0
2	producteur	10	3	100	17
3	producteur	50	17	150	4
4	producteur	30	10	50	-4
5	producteur	25	8	200	-47
6	consommateur	15	5	0	0
7	consommateur	15	5	0	0
8	consommateur	25	0	0	0
9	consommateur	15	5	0	0
10	consommateur	15	5	0	0
11	consommateur	5	0	0	0
12	consommateur	10	0	0	0
13	consommateur	25	8	0	0
14	consommateur	20	7	0	0
15	consommateur	30	10	0	0
16	consommateur	30	10	0	0
17	consommateur	60	20	0	0
18	consommateur	15	5	0	0
19	consommateur	15	5	0	0
20	consommateur	25	8	0	0
21	consommateur	20	7	0	0
22	consommateur	20	7	0	0
23	consommateur	15	7	0	0
24	consommateur	15	5	0	0
25	consommateur	25	8	0	0

*Valeurs planifiées des puissances du réseau d'Application*

### V.3. Application des méthode sur le réseau 25 noeuds

Nous allons considérer les pertes actives comme étant variables et fonction linéaire des puissances générées. Les résultats par la méthode de Gauss-Seidel ont donné les valeurs des coefficients de cette fonction comme suit :

$$P_L = 0.061258 P_{G1} + 0.124017 P_{G2} + 0.063858 P_{G3} - 0.191574 P_{G4} - 0.032362 P_{G5}$$

L'équation de bilan deviendra donc :

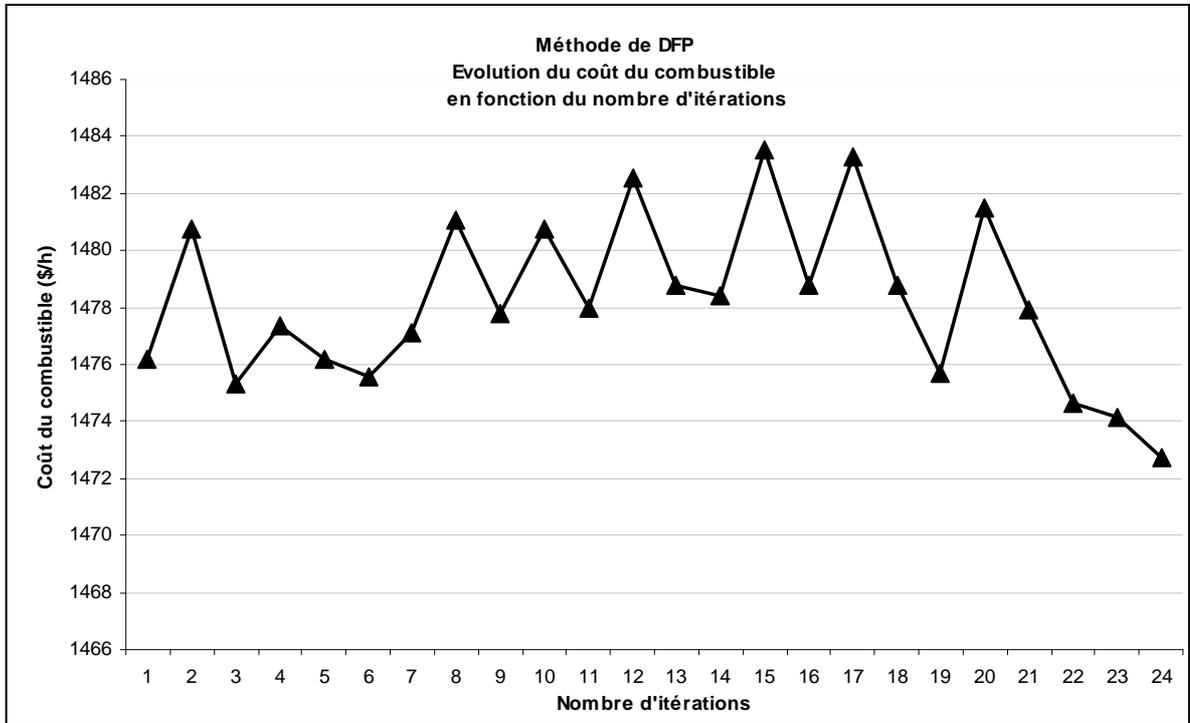
$$0.938742 P_{G1} + 0.875983 P_{G2} + 0.936142 P_{G3} + 1.191574 P_{G4} + 1.032362 P_{G5} = 530$$

Les résultats du calcul des puissances actives générées optimales, du coût minimal de combustible, des pertes totales et du temps de calcul sont donnés par les tableaux suivants :

**V.3.1. Méthode de D.F.P**

**Tableau des résultats**

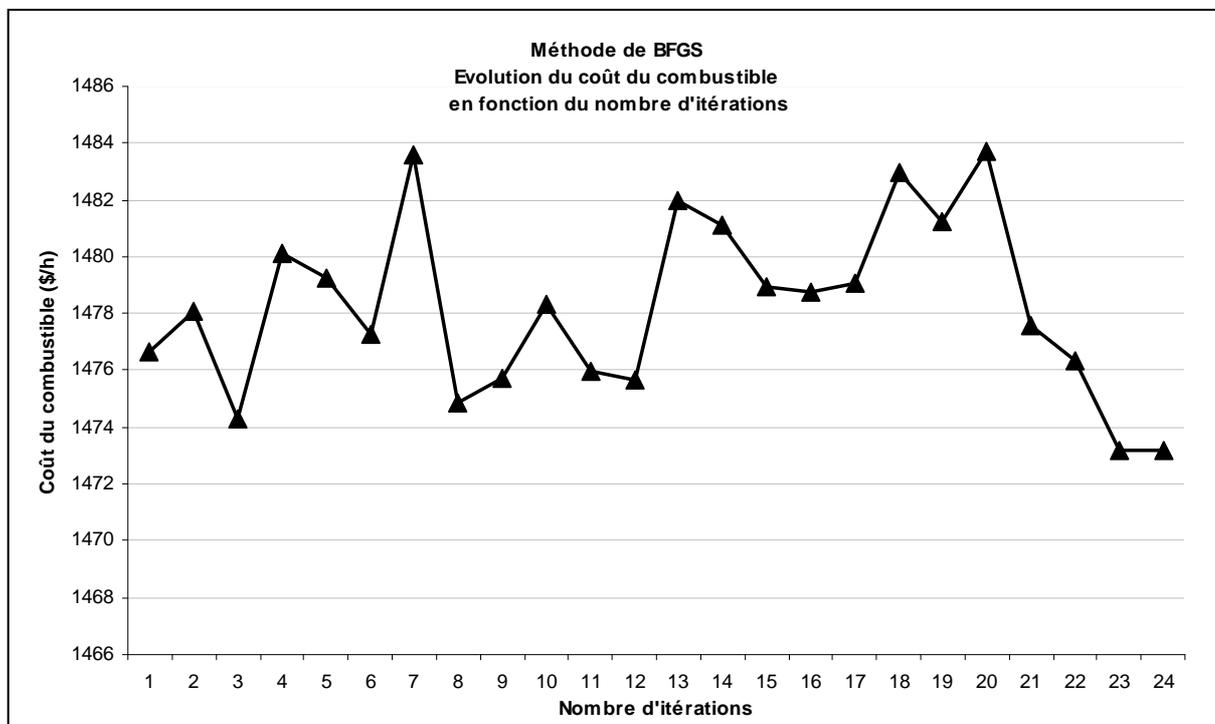
**Evolution du Coût du combustible en fonction du nombre d'itérations :**



**V.3.2. Méthode de B.F.G.S**

**Tableau des résultats**

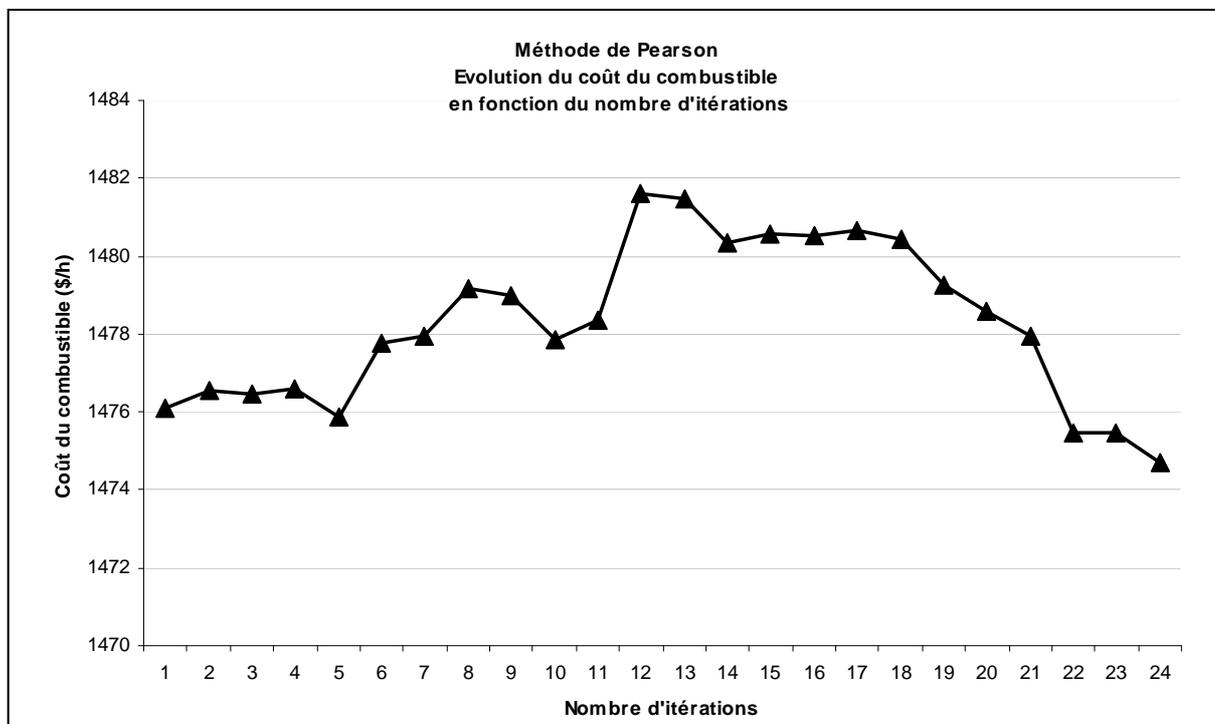
**Evolution du Coût du combustible en fonction du nombre d'itérations :**



**V.3.3. Méthode de Pearson**

**Tableau des résultats**

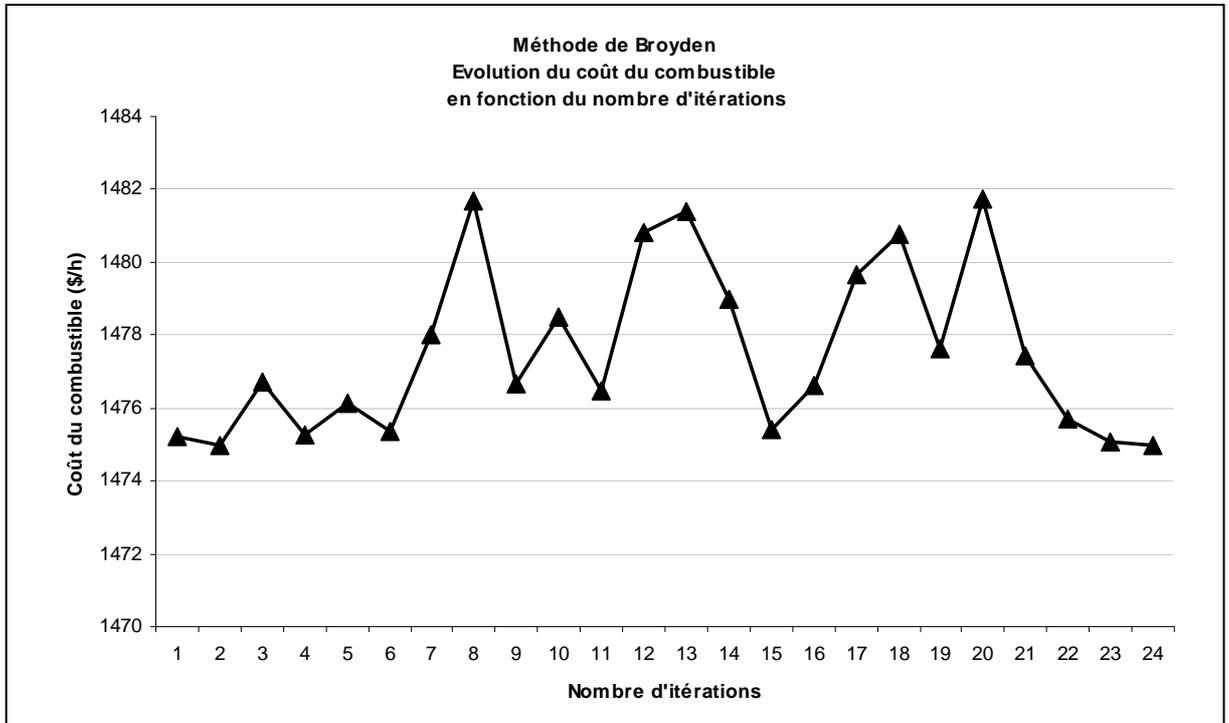
**Evolution du Coût du combustible en fonction du nombre d'itérations :**



**V.3.4. Méthode de Broyden**

**Tableau des résultats**

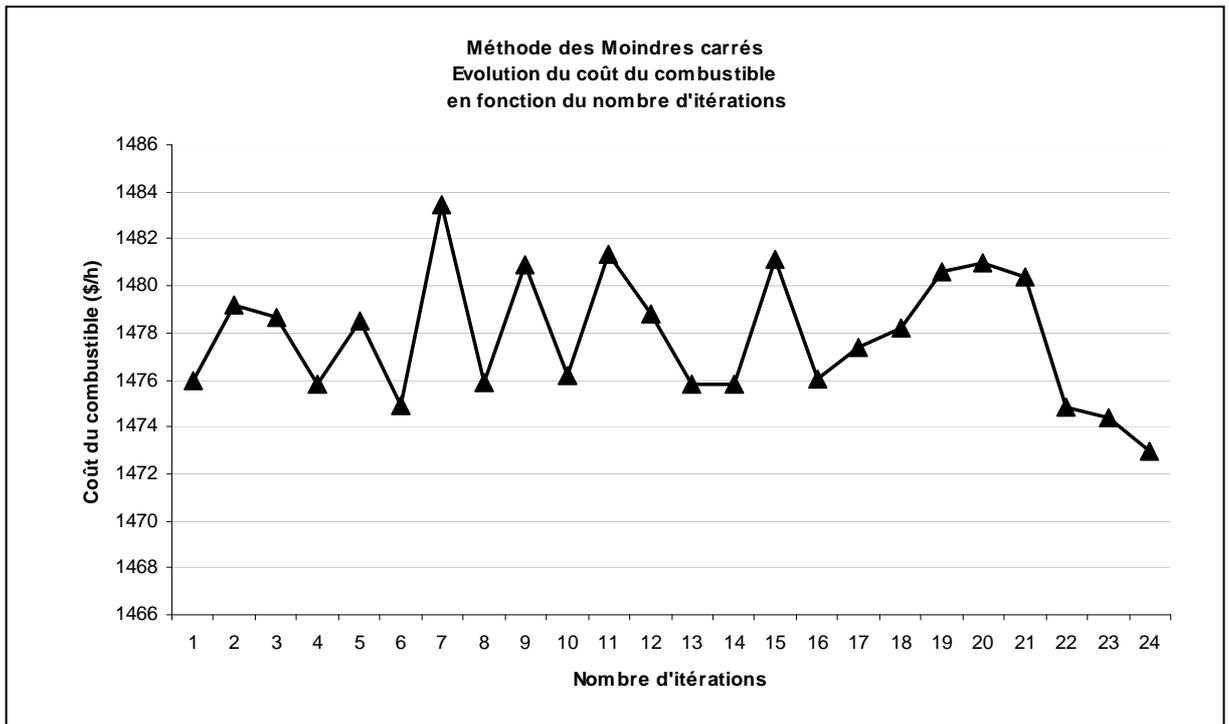
***Evolution du Coût du combustible en fonction du nombre d'itérations :***



**V.3.5. Méthode des Moindres Carrés**

**Tableau des résultats**

**Evolution du Coût du combustible en fonction du nombre d'itérations :**



**V.3.6. Résumé des résultats (réseaux 25 noeuds)**

*Si on résume les résultats des quatre méthodes pour le réseaux 25 noeuds et on les compare par rapport aux résultats donnés par la méthode ACO (dans le cadre d'un autre travail), et en classant toutes les méthodes par ordre croissant de la valeur du coût optimal on obtient le tableau suivant :*

Méthode	$P_{G1}^{(opt.)}$ (MW)	$P_{G2}^{(opt.)}$ (MW)	$P_{G3}^{(opt.)}$ (MW)	$P_{G4}^{(opt.)}$ (MW)	$P_{G5}^{(opt.)}$ (MW)	Coût Opt. (\$/h)	Pertes (MW)	$coût_{MAX}^{opt} - coût_{MIN}^{opt}$
<b>A.C.O.</b>	<b>147.15</b>	<b>82.79</b>	<b>86.85</b>	<b>28.48</b>	<b>196.33</b>	<b>1470.10</b>	11.60	-----
<b>D.F.P.</b>	<b>155.10</b>	<b>83.29</b>	<b>80.56</b>	<b>32.28</b>	<b>191.37</b>	<b>1472.75</b>	12.60	10.24
M. C.	159.33	80.24	80.24	30.46	192.51	1473.00	12.78	10.42
B.F.G.S.	155.75	81.86	82.30	30.00	193.04	1473.21	12.95	10.61
Pearson	157.60	85.63	84.82	35.07	180.03	1474.71	13.15	6.89
Broyden	166.65	81.73	80.63	31.24	183.33	1474.95	13.58	6.76

*Les résultats obtenus dans le cadre de notre travail et celles obtenues par la méthode ACO sont très proches, vu que la différence en coût entre la méthode D.F.P. et la méthode ACO est de 2.65 \$/h et en pertes de 1.00 MW cela montre que la programmation non linéaire, malgré son ancienneté, reste un outils très performant et assez pratique pour résoudre les problèmes d'OPF.*

*Selon ce tableau (méthode de ACO exclue), la méthode DFP donne le meilleur coût, quoique toutes les méthodes donnent des résultats sensiblement approchés.*

*Mais nous remarquons que la différence entre le coût optimal min. et le coût optimal max. pour chaque méthode est assez élevé. Cela nous amènes a conclure que toutes ces méthodes dépendent des valeurs initiales ( $P_{G1}^{(0)}, P_{G2}^{(0)}, P_{G3}^{(0)}, P_{G4}^{(0)}, P_{G5}^{(0)}$ ) choisies. D'où la nécessité de faire le plus large balayage possible du domaine des  $P_{Gi}^{(0)}$  pour éviter les minimums locaux.*

**V.4. Présentation des données du réseau d'Application 14 noeuds**

L'application a été testée aussi sur le réseau A.E.P. 14 noeuds dont le schéma est représenté par la figure 4.2.

Les caractéristiques des deux noeuds de production sont :

Noeud	P <sub>gi</sub> (MW)		Coefficients de coût		
	Min	Max	a	b	c
1	135	195	0.006	1.5	100
2	70	145	0.009	2.1	130

*Caractéristiques des noeuds de production - réseau d'Application 14 noeuds*

Cela nous donne les équations de coûts, des deux noeuds de production, comme suit :

$$F_1(P_{G1}) = 0.006P_{G1}^2 + 1.5P_{G1} + 100$$

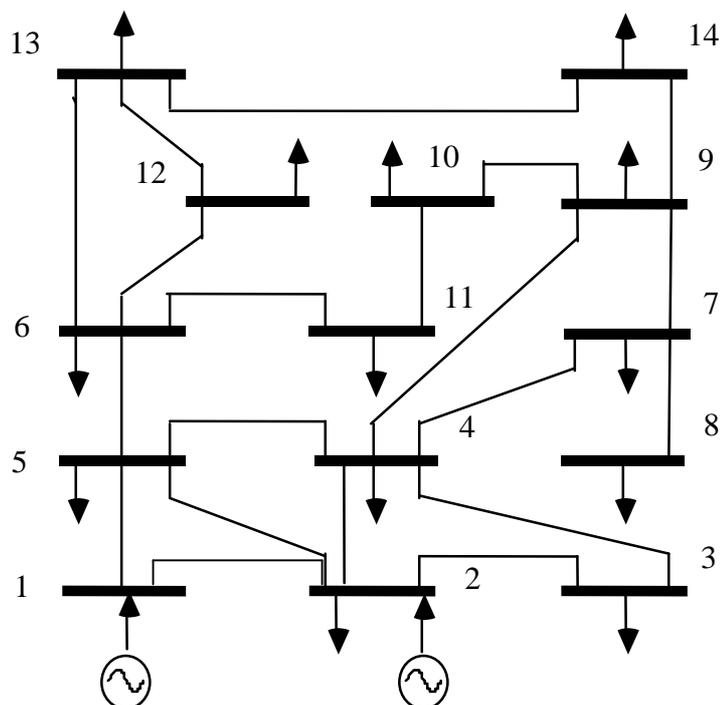
$$F_2(P_{G2}) = 0.009P_{G2}^2 + 2.1P_{G2} + 130$$

avec les contraintes suivantes:

$$135 \leq P_{G1} \leq 195 \quad (MW)$$

$$70 \leq P_{G2} \leq 145 \quad (MW)$$

$$\sum C_k = 251.8 \quad MW \quad (somme \text{ des puissance demandées})$$



*Figure 4.2 : Schéma simplifié du réseau d'Application 14 noeuds*

Les caractéristiques du réseau et les valeurs planifiées des puissances sont données par les tableaux suivants :

N°	Type	P (MW)	Q (Mvar)	P (MW)	Q (Mvar)
1	bilan	0	0	0	0
2	producteur	08.25	04.89	60	20
3	consommateur	95.00	10.79	0	0
4	consommateur	49.00	03.70	0	0
5	consommateur	07.80	02.00	0	0
6	consommateur	11.99	15.35	0	0
7	consommateur	02.00	01.00	0	0
8	consommateur	10.99	21.62	0	0
9	consommateur	31.00	18.00	0	0
10	consommateur	11.00	07.00	0	0
11	consommateur	04.50	02.00	0	0
12	consommateur	07.00	01.80	0	0
13	consommateur	14.00	06.00	0	0
14	consommateur	16.00	06.00	0	0

*Valeurs planifiées des puissances du réseau d'Application 14 noeuds*

Nœud		impédance		admittance shunt
K	m	R	X	
1	2	0.01938	0.05917	0.0264
1	5	0.05403	0.22304	0.0246
2	3	0.04699	0.19797	0.0219
2	4	0.05811	0.17632	0.0187
2	5	0.05695	0.17388	0.0170
3	4	0.06701	0.17103	0.0170
4	5	0.01335	0.04211	0.0006
4	7	0.0000	0.02091	0.0000
4	9	0.0000	0.55618	0.0000
4	6	0.0000	0.25202	0.0000
6	11	0.09498	0.1989	0.0000
6	12	0.12291	0.25581	0.0000
6	13	0.06615	0.13027	0.0000
7	8	0.0000	0.17615	0.0000
7	9	0.0000	0.11001	0.0000
9	10	0.03181	0.0845	0.0000
9	14	0.12711	0.27038	0.0000
10	11	0.08205	0.19207	0.0000
12	13	0.22092	0.19988	0.0000
13	14	0.17093	0.34802	0.0000

*Caractéristiques du réseau d'Application 14 noeuds*

### V.5. Application des méthode sur le réseau 14 noeuds

On considère toujours que les pertes actives sont variables et fonction linéaire des puissances générées. Les résultats par la méthode de Gauss-Seidel ont donné les valeurs des coefficients de cette fonction comme suit :

$$P_L = 0.08996 P_{G1} + 0.03828 P_{G2}$$

L'équation de bilan deviendra donc :

$$0.91004 P_{G1} + 0.96172 P_{G2} = 251.28$$

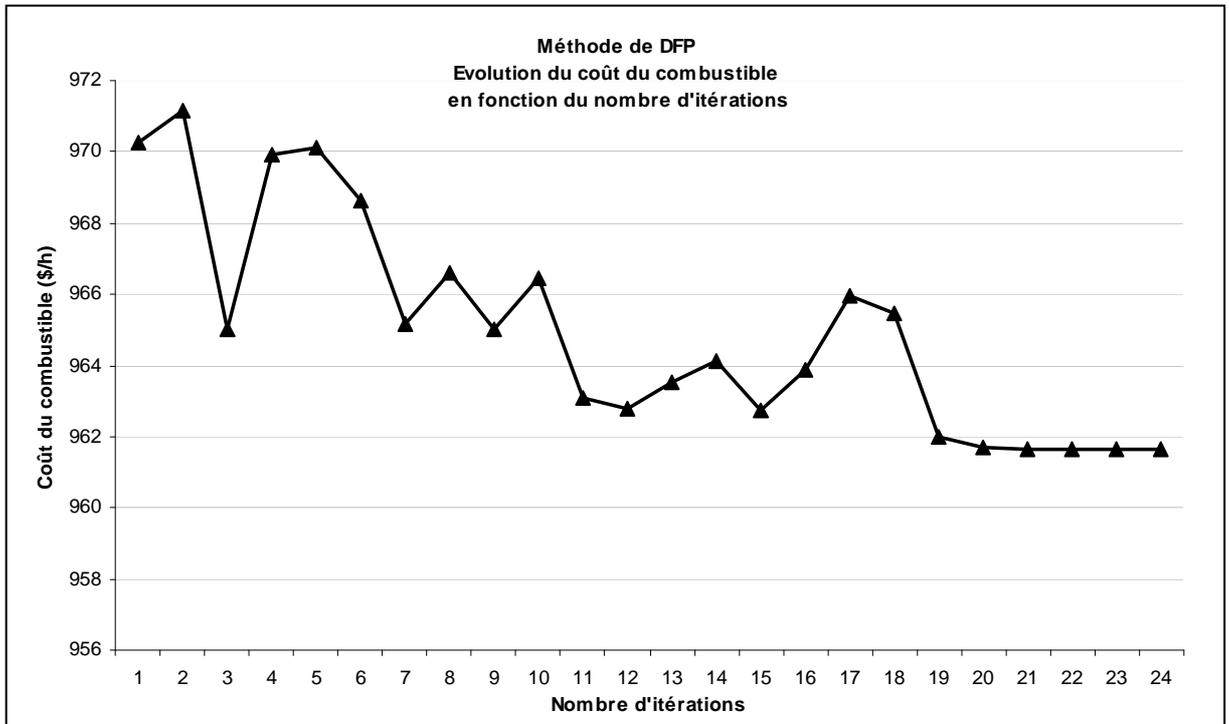
Les résultats du calcul des puissances actives générées optimales, du coût minimal de combustible, des pertes totales et du temps de calcul sont donnés par les tableaux suivants :

V.5.1. Méthode de D.F.P

***Tableau des résultats***

$P_{G1}^{(0)}$ (MW)	$P_{G2}^{(0)}$ (MW)	$P_{G1}^{(opt.)}$ (MW)	$P_{G2}^{(opt.)}$ (MW)	Coût (\$/h)	Pertes (MW)	Nombre d'itérations	Temps (s)
155.00	97.50	151.144	118.796	970.267	18.14	12	0.00
155.00	102.50	149.894	119.978	971.159	18.08	12	0.00
155.00	107.50	160.394	110.045	965.034	18.64	12	0.00
155.00	112.50	151.644	118.323	969.923	18.17	12	0.00
155.00	117.50	151.394	118.559	970.094	18.16	12	0.00
160.00	97.50	153.644	116.431	968.616	18.28	12	0.00
160.00	102.50	160.144	110.282	965.144	18.63	12	0.00
160.00	107.50	157.144	113.120	966.599	18.47	12	0.00
160.00	112.50	160.394	110.045	965.034	18.64	12	0.00
160.00	117.50	157.394	112.883	966.468	18.48	13	0.00
<b>165.00</b>	<b>97.50</b>	<b>175.894</b>	<b>95.382</b>	<b>961.657</b>	<b>19.47</b>	<b>12</b>	<b>0.00</b>
165.00	102.50	180.894	90.652	962.008	19.74	12	0.00
165.00	107.50	176.894	94.436	961.671	19.53	12	0.00
165.00	112.50	175.644	95.619	961.658	19.46	12	0.00
165.00	117.50	177.644	93.727	961.700	19.57	12	0.00
170.00	97.50	176.394	94.909	961.661	19.50	12	0.00
170.00	102.50	165.894	104.842	963.063	18.94	12	0.00
170.00	107.50	166.894	103.896	962.796	18.99	12	0.00
170.00	112.50	164.394	106.261	963.516	18.86	12	0.00
170.00	117.50	189.144	82.848	964.124	20.19	12	0.00
175.00	97.50	184.644	87.105	962.733	19.94	12	0.00
175.00	102.50	163.394	107.207	963.854	18.80	13	0.00
175.00	107.50	158.394	111.937	965.962	18.53	12	0.00
175.00	112.50	192.382	79.775	965.443	20.36	12	0.00

**Evolution du Coût du combustible en fonction du nombre d'itérations :**

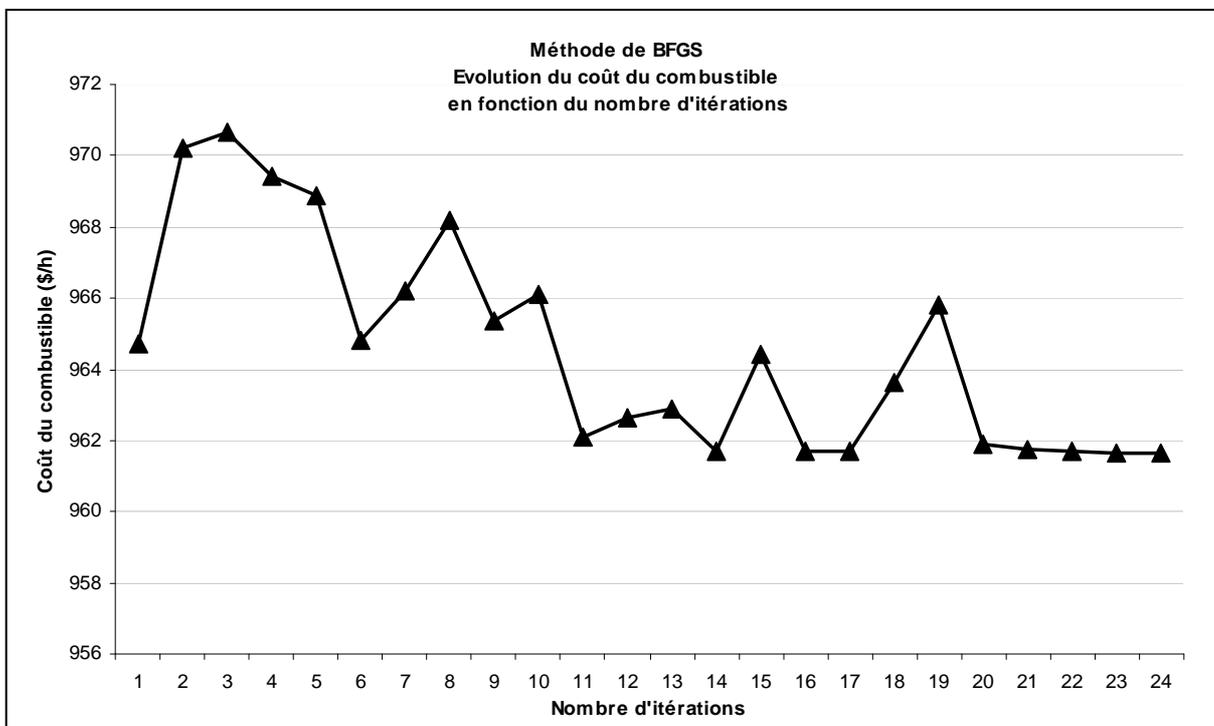


## V.5.2. Méthode de B.F.G.S

Tableau des résultats

$P_{G1}^{(0)}$ (MW)	$P_{G2}^{(0)}$ (MW)	$P_{G1}^{(opt.)}$ (MW)	$P_{G2}^{(opt.)}$ (MW)	Coût (\$/h)	Pertes (MW)	Nombre d'itérations	Temps (s)
155.00	97.50	161.114	109.364	964.728	18.68	16	0.00
155.00	102.50	151.239	118.706	970.201	18.15	16	0.00
155.00	107.50	150.614	119.297	970.640	18.12	16	0.00
155.00	112.50	152.364	117.642	969.439	18.21	16	0.00
155.00	117.50	153.239	116.814	968.871	18.26	17	0.00
160.00	97.50	160.864	109.601	964.833	18.67	16	0.00
160.00	102.50	157.864	112.439	966.227	18.51	16	0.00
160.00	107.50	154.364	115.750	968.173	18.32	17	0.00
160.00	112.50	159.614	110.783	965.383	18.60	16	0.00
160.00	117.50	158.114	112.202	966.101	18.52	16	0.00
165.00	97.50	181.614	89.971	962.117	19.78	16	0.00
165.00	102.50	177.614	93.755	961.699	19.57	16	0.00
165.00	107.50	176.614	94.701	961.664	19.51	16	0.00
<b>165.00</b>	<b>112.50</b>	<b>176.364</b>	<b>94.938</b>	<b>961.660</b>	<b>19.50</b>	<b>16</b>	<b>0.00</b>
165.00	117.50	178.364	93.046	961.743	19.61	16	0.00
170.00	97.50	171.864	99.195	961.885	19.26	16	0.00
170.00	102.50	167.614	103.215	962.621	19.03	16	0.00
170.00	107.50	166.614	104.161	962.868	18.98	17	0.00
170.00	112.50	177.489	93.873	961.693	19.56	16	0.00
170.00	117.50	189.864	82.167	964.399	20.23	16	0.00
175.00	97.50	177.614	93.755	961.699	19.57	16	0.00
175.00	102.50	174.739	96.475	961.676	19.41	16	0.00
175.00	107.50	164.114	106.526	963.608	18.84	16	0.00
175.00	112.50	193.114	79.084	965.796	20.40	17	0.00

**Evolution du Coût du combustible en fonction du nombre d'itérations :**

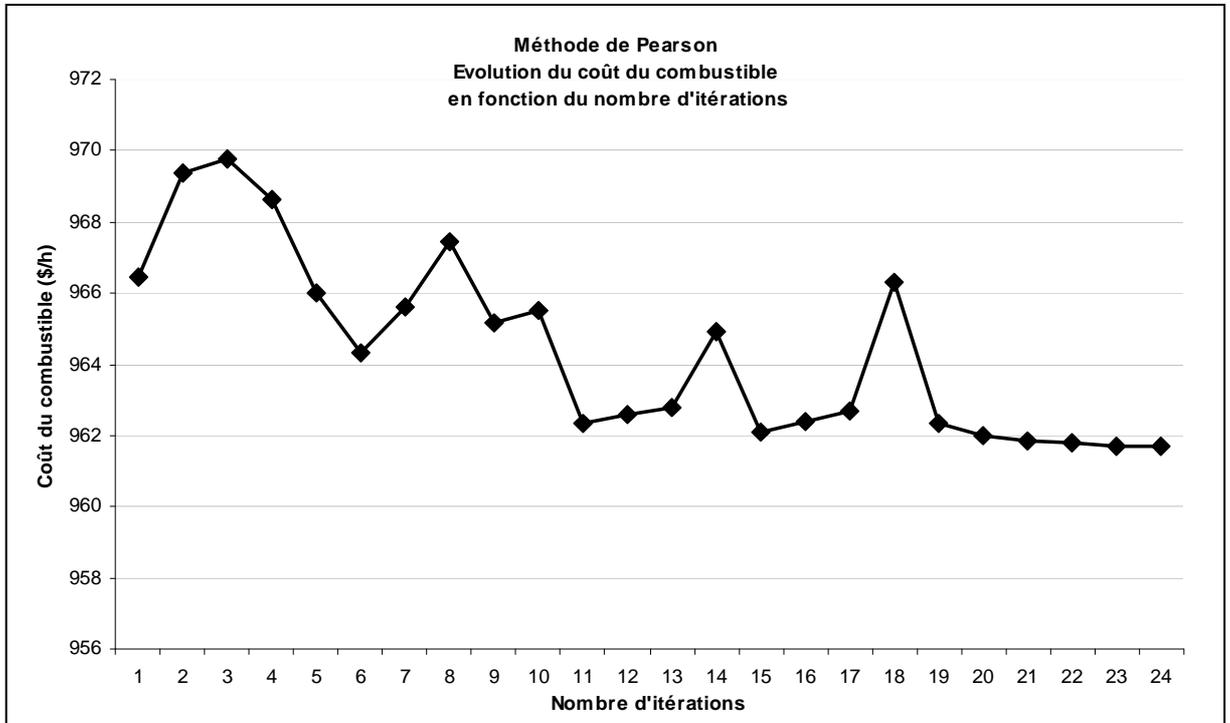


**V.5.3. Méthode de Pearson**

***Tableau des résultats***

$P_{G1}^{(0)}$ (MW)	$P_{G2}^{(0)}$ (MW)	$P_{G1}^{(opt.)}$ (MW)	$P_{G2}^{(opt.)}$ (MW)	Coût (\$/h)	Pertes (MW)	Nombre d'itérations	Temps (s)
155.00	97.50	157.407	112.872	966.461	18.48	16	0.00
155.00	102.50	152.469	117.542	969.370	18.22	16	0.00
155.00	107.50	151.844	118.134	969.787	18.18	16	0.00
155.00	112.50	153.594	116.478	968.647	18.28	16	0.00
155.00	117.50	158.282	112.044	966.017	18.53	17	0.00
160.00	97.50	162.094	108.437	964.334	18.73	16	0.00
160.00	102.50	159.094	111.275	965.624	18.57	16	0.00
160.00	107.50	155.594	114.586	967.450	18.38	17	0.00
160.00	112.50	160.094	110.329	965.166	18.63	16	0.00
160.00	117.50	159.344	111.039	965.507	18.59	16	0.00
165.00	97.50	182.844	88.808	962.336	19.85	16	0.00
165.00	102.50	178.844	92.592	961.779	19.63	16	0.00
165.00	107.50	177.844	93.538	961.710	19.58	16	0.00
<b>165.00</b>	<b>112.50</b>	<b>177.594</b>	<b>93.774</b>	<b>961.698</b>	<b>19.57</b>	<b>16</b>	<b>0.00</b>
165.00	117.50	179.594	91.882	961.849	19.67	16	0.00
170.00	97.50	170.969	100.041	961.998	19.21	16	0.00
170.00	102.50	168.844	102.052	962.356	19.10	16	0.00
170.00	107.50	167.844	102.998	962.568	19.04	17	0.00
170.00	112.50	184.907	86.857	962.798	19.96	16	0.00
170.00	117.50	191.094	81.003	964.904	20.29	16	0.00
175.00	97.50	181.344	90.227	962.074	19.77	16	0.00
175.00	102.50	168.797	102.097	962.365	19.09	16	0.00
175.00	107.50	167.359	103.456	962.681	19.02	16	0.00
175.00	112.50	194.044	78.211	966.280	20.45	17	0.00

***Evolution du Coût du combustible en fonction du nombre d'itérations :***

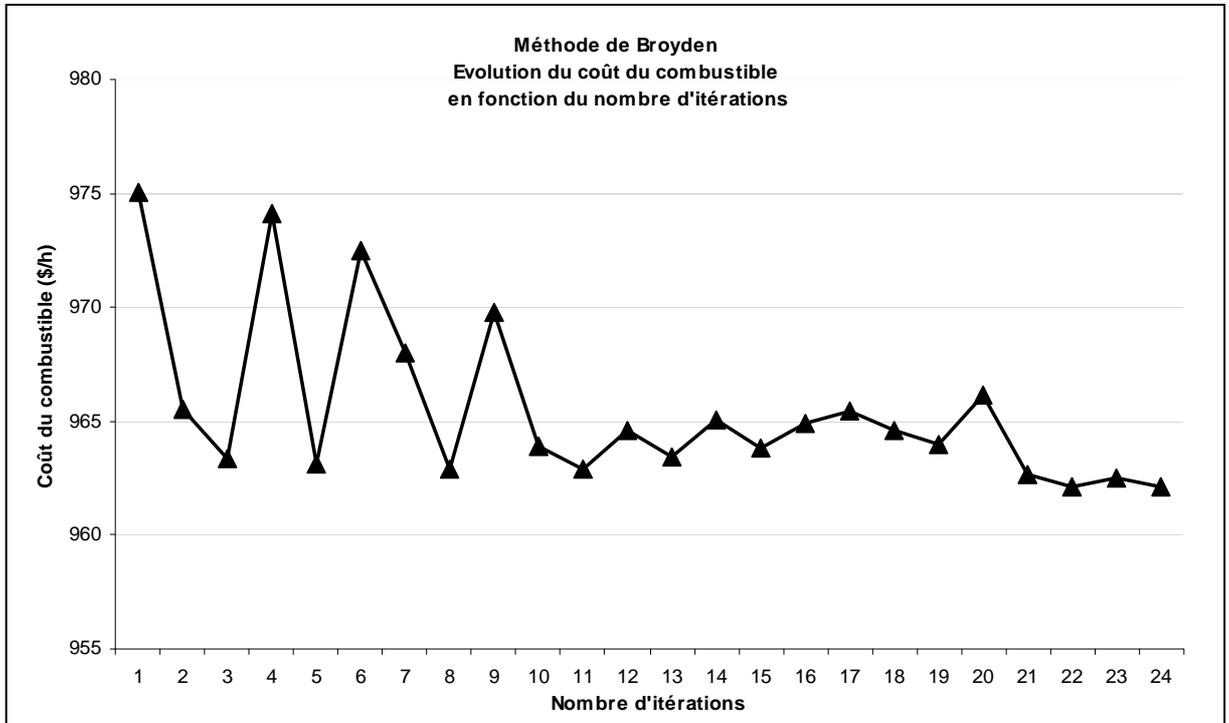


**V.5.4. Méthode de Broyden**

***Tableau des résultats***

$P_{G1}^{(0)}$ (MW)	$P_{G2}^{(0)}$ (MW)	$P_{G1}^{(opt.)}$ (MW)	$P_{G2}^{(opt.)}$ (MW)	Coût (\$/h)	Pertes (MW)	Nombre d'itérations	Temps (s)
155.00	97.50	145.009	124.600	975.064	17.81	19	0.00
155.00	102.50	159.304	111.076	965.526	18.58	17	0.00
155.00	107.50	164.867	105.814	963.367	18.88	22	0.00
155.00	112.50	146.134	123.535	974.106	17.88	19	0.00
155.00	117.50	165.742	104.987	963.106	18.93	19	0.00
160.00	97.50	148.134	121.643	972.489	17.98	21	0.00
160.00	102.50	154.634	115.494	968.010	18.33	20	0.00
160.00	107.50	166.554	104.218	962.883	18.97	19	0.00
160.00	112.50	167.554	103.272	962.635	19.03	25	0.01
160.00	117.50	151.884	118.096	969.760	18.18	17	0.00
165.00	97.50	163.304	107.292	963.885	18.80	19	0.00
165.00	102.50	185.304	86.480	962.901	19.98	19	0.00
165.00	107.50	190.304	81.750	964.575	20.25	19	0.00
165.00	112.50	170.134	100.831	962.124	19.17	17	0.00
165.00	117.50	187.054	84.825	963.407	20.07	21	0.00
170.00	97.50	160.384	110.055	965.039	18.64	17	0.00
170.00	102.50	163.509	107.099	963.813	18.81	19	0.00
170.00	107.50	191.054	81.041	964.886	20.29	21	0.00
170.00	112.50	192.367	79.799	965.470	20.36	21	0.00
170.00	117.50	183.634	88.060	962.499	19.89	22	0.00
175.00	97.50	161.337	109.154	964.636	18.69	21	0.00
<b>175.00</b>	<b>102.50</b>	<b>181.634</b>	<b>89.952</b>	<b>962.120</b>	<b>19.78</b>	<b>23</b>	<b>0.01</b>
175.00	107.50	188.804	83.169	963.999	20.17	19	0.00
175.00	112.50	193.744	78.490	966.113	20.43	20	0.00

**Evolution du Coût du combustible en fonction du nombre d'itérations :**

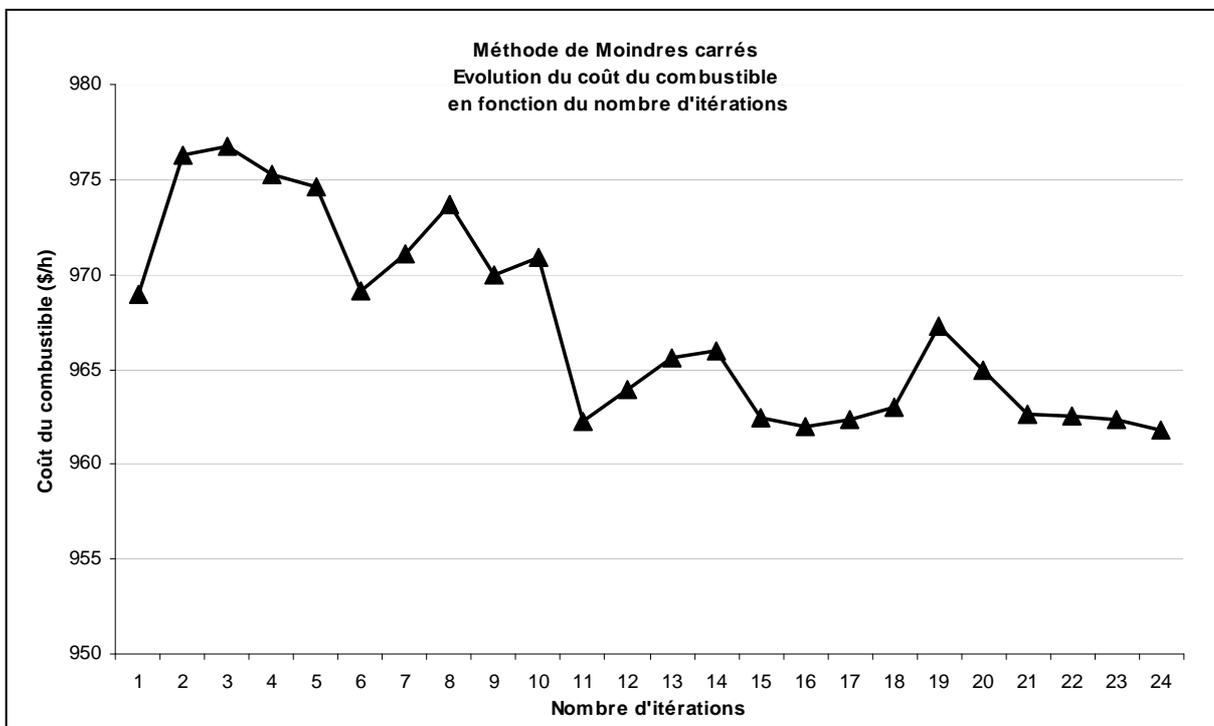


## V.5.5. Méthode des Moindres Carrés

***Tableau des résultats***

$P_{G1}^{(0)}$ (MW)	$P_{G2}^{(0)}$ (MW)	$P_{G1}^{(opt.)}$ (MW)	$P_{G2}^{(opt.)}$ (MW)	Coût (\$/h)	Pertes (MW)	Nombre d'itérations	Temps (s)
155.00	97.50	153.059	116.985	968.987	18.25	16	0.00
155.00	102.50	143.677	125.860	976.246	17.74	16	0.00
155.00	107.50	143.084	126.421	976.788	17.71	16	0.00
155.00	112.50	144.746	124.849	975.294	17.80	16	0.00
155.00	117.50	145.577	124.062	974.576	17.85	17	0.00
160.00	97.50	152.821	117.210	969.140	18.23	16	0.00
160.00	102.50	149.971	119.906	971.103	18.08	16	0.00
160.00	107.50	146.646	123.051	973.681	17.90	17	0.00
160.00	112.50	151.634	118.333	969.930	18.17	16	0.00
160.00	117.50	150.209	119.681	970.930	18.09	16	0.00
<b>165.00</b>	<b>97.50</b>	<b>172.534</b>	<b>98.562</b>	<b>961.816</b>	<b>19.29</b>	<b>16</b>	<b>0.00</b>
165.00	102.50	168.734	102.156	962.378	19.09	16	0.00
165.00	107.50	167.784	103.055	962.582	19.04	16	0.00
165.00	112.50	167.546	103.280	962.637	19.03	16	0.00
165.00	117.50	169.446	101.482	962.242	19.13	16	0.00
170.00	97.50	163.271	107.324	963.897	18.80	16	0.00
170.00	102.50	159.234	111.143	965.559	18.58	16	0.00
170.00	107.50	158.284	112.042	966.017	18.53	17	0.00
170.00	112.50	168.615	102.269	962.402	19.08	16	0.00
170.00	117.50	180.371	91.147	961.939	19.72	16	0.00
175.00	97.50	168.734	102.156	962.378	19.09	16	0.00
175.00	102.50	166.002	104.740	963.033	18.94	16	0.00
175.00	107.50	155.909	114.289	967.272	18.40	16	0.00
175.00	112.50	191.459	80.628	964.952	20.29	17	0.00

**Evolution du Coût du combustible en fonction du nombre d'itérations :**



**VI.5.6. Résumé des résultats (réseaux 14 noeuds)**

*Si on classe les méthodes par ordre croissant de la valeur du coût optimal donnée comme résultat on obtient le tableau suivant :*

Méthode	$P_{G1}^{(0)}$	$P_{G2}^{(0)}$	$P_{G1}^{opt}$	$P_{G2}^{opt}$	Coût Opt.	Pertes	$coût_{MAX}^{opt} - coût_{MIN}^{opt}$
DFP	165.00	97.50	<b>175.894</b>	<b>95.382</b>	<b>961.657</b>	19.47	9.50
BFGS	165.00	112.50	<b>176.364</b>	<b>94.938</b>	<b>961.660</b>	19.50	8.98
Pearson	165.00	112.50	<b>177.594</b>	<b>93.774</b>	<b>961.698</b>	19.57	8.09
Moindres C.	165.00	97.50	<b>172.534</b>	<b>98.562</b>	<b>961.816</b>	19.29	14.97
Broyden	175.00	102.50	<b>181.634</b>	<b>89.952</b>	<b>962.120</b>	19.78	12.94

*Selon ce tableau, la méthode de D.F.P. donne le meilleur coût, quoique toutes les méthodes donnent des résultats sensiblement approchés.*

*Mais nous remarquons que la différence entre le coût optimal min. et le coût optimal max. pour chaque méthode est assez élevé. Cela nous amènes a conclure que toutes ces méthodes dépendent des valeurs initiales ( $P_{G1}^{(0)}, P_{G2}^{(0)}$ ) choisies. D'où la nécessité de faire le plus large balayage possible du domaine des  $P_{Gi}^{(0)}$  pour éviter les minimums locaux.*

---

## CONCLUSION

---

Dans ce travail, nous avons présenté une approche de formulation et un algorithme de solution du problème de la répartition optimale des puissances actives d'un réseau électrique. Les méthodes conventionnelles d'optimisation de l'écoulement des puissances actives ont été revues. Ce modèle basé sur la programmation non linéaire, plus simple a été introduit pour le contrôle à temps réel.

Plusieurs modèles sont présentés pour résoudre un tel problème. Néanmoins, la programmation non linéaire reste le modèle le plus pratique dans ce cas pour plusieurs raisons, dont on citera : sa simplicité, sa fiabilité, ainsi que sa stabilité.

Nous avons développé une solution algorithmique, basé sur 5 méthodes non linéaires choisies, qui à permet de produire un outils (logiciel d'optimisation) pratique qui peut d'être utilisé pour un dispatching réel, comme un outils pédagogique et aussi comme un outils de comparaison pour la validation d'autre modèles.

La procédure d'optimisation nécessite la connaissance d'informations les consommations de puissances. Se basant sur ces données, elle évalue la répartition des puissances actives de façon itérative par une méthode non linéaire. Elle traite les cas contraints et tient compte des relations normales entre variables d'état et variables de contrôle.

Le présent algorithme de solution, basé sur la programmation non linéaire, fournit une précision acceptable du point de vue pratique et requiert un temps de calcul court pour obtenir une bonne valeur des équipements de contrôle. Ainsi, il sera particulièrement efficace pour assister un opérateur de réseau électrique dans le control et l'optimisation de l'écoulement des puissances dans le réseau électrique.

Le problème de convergence vers un optimum locale des méthode non linéaire à été, pratiquement évité, en faisant varié les valeurs initiales  $X^0$  d'une manière automatique par un balayage de tout l'intervalle des valeurs par un pas fixe.

De façon générale, les résultats obtenus par cette approche non linéaire et surtout le temps moyen de calcul lors des simulations du réseau à 14 nœuds permettent d'envisager l'utilisation du modèle pour l'analyse et l'exploitation de grands réseaux électriques.

---

## BIBLIOGRAPHIE

---

- [1] M.Rahli et P.Pirotte, Dispatching économique par une nouvelle méthode de programmation non linéaire à la répartition économique des puissances actives dans un réseau d'énergie électrique, CIMASI'96 Casablanca, Maroc, 14-16 Novembre
- [2] M.rahli, Contribution à l'Etude de la Répartition Optimale des Puissances Actives dans un Réseau d'Energie Electrique, thèse dedoctorat,06 janvier 1996, USTO. Algérie.
- [3] L.Abdelmalek, Répartition Optimale des Puissances Actives et Réactives par les méthodes Hessiennes, CIMASI'2002, Casablanca 22-25 Octobre 2002. Maroc.
- [4] R.Ouiddir et m.rahli, Dispatching Economique Actif dans un Réseau d'Energie Electrique par un Algorithme Génétique, 2nd International Conférence on Electrotechnics, 13-15 Novembre2000, ICEL2000, USTOran, Algérie.
- [5] M.Rahli ET P.Pirotte, Optimal load flow using sequential unconstrained Minimization technique SUMT method under power transmission losses minimization, Electric Power Research, 1999 Elsevier Science.
- [6] Analyse des réseaux triphasés en régime perturbé à l'aide des composantes symétriques, Cahier Technique n°18, décembre 1990 - B. DE METZ NOBLAT
- [7] Protection des réseaux HTA industriels et tertiaires, Cahier Technique n°174, décembre 1994 - A. SASTRÉ
- [8] GLOVER, J.D., SARMA, M.S., Power Systems Analysis and Design, 4th Ed., Brooks/Cole
- [9] Thomson Learning, 2007. BERGEN, A.R., Vittal, V., Power Systems Analysis, 2nd Ed., Upper Saddle River, N.J., Prentice Hall, 2000.
- [10] GRAINGER, J.J., STEVENSON, W.D. Jr., Power System Analysis, New York, McGraw-Hill, 1994
- [11] SACCOMANNO, F., Electric Power System, Analysis and Control, IEEE Press, Wiley,2003.

- [12] MATLAB, The Learning Matlab 7, Matlab and Simulink Student Version R2007a, The MathWorks Inc., 1984-2007.
- [13] A.S. El-Bakry, R.A. Tapia, T. Tsuchiya, and Y. Zhang, "On the formulation and theory of the Newton interiorpoint method for nonlinear programming," *Journal of Optimization Theory and Applications*, vol. 89, no. 3, pp. 507–541, 1996.
- [14] A.V. Fiacco and G.P. McCormick, *Nonlinear Programming: Sequential Unconstrained Minimization Techniques*, John Wiley and Sons: New York, NY, 1968.
- [15] R. Fourer, D. Gay, and B. Kernighan, *AMPL, A Modeling Language for Mathematical Programming*, Boyd and Fraser Publishing Co.: Danvers, MA, 1993.
- [16] R.S. Gajulapalli, "INTOPT: An interior point algorithm for large scale nonlinear optimization," *Doctoral Dissertation*, University of Texas at Austin, 1995.
- [17] D. Gay, "More AD of nonlinear AMPL models: Computing Hessian information and exploiting partial separability," in *Computational Differentiation*, M. Berz, C. Bischof, G. Corliss, and A. Griewank (Eds.), SIAM, 1996.
- [18] S. Granville, "Optimal reactive dispatch through interior point methods," *Internal Report*, CEPEL, Av. Hum Q. 5-Cidade Universit´aria, Ilha do Fund˜ao, CEP 21941, Rio de Janeiro, R.J., Brazil, 1991.
- [19] S. P. Han, "Superlinearly convergent variable metric algorithms for general nonlinear programming problems," *Mathematical Programming*, vol. 11, pp. 263–282, 1976.
- [20] D.M. Himmelblau, *Applied Nonlinear Programming*, McGraw-Hill: New York, 1972.
- [21] L.S. Lasdon, J. Plummer, and G. Yu, "Primal-dual and primal interior point algorithms for general nonlinear programs," *ORSA Journal on Computing*, vol. 7, no. 3, pp. 321–332, 1995.
- [22] Y. Zhang and R.A. Tapia, "Superlinear and quadratic convergence of primal-dual interior-point methods for linear programming revisited," *Report TR91-27*, Department of Mathematical Sciences, Rice University, 1991.
- [23] Bouktir T. and Belkacemi M., *Object-Oriented Optimal Power Flow*, *Electric Power Components and Systems*, vol. 31, no. 6, p. 525-534, 2003.
- [24] Yuryevich J., Wong K. P., *Evolutionary Programming Based Optimal Power Flow Algorithm*, *IEEE Transaction on Power Systems*, vol. 14, no. 4, p. 1245-1250, 1999.

## Bibliographie

---

- [25] Bouktir T. and Slimani L., *Economic Power Dispatch of Power Systems with a NO<sub>x</sub> emission Control via an Evolutionary Algorithm*, WSEAS TRANSACTIONS on SYSTEMS, Issue 2, Vol. 3, p. 849-854, 2004.
- [26] Benouis A « Optimisation des puissances actives par l'algorithme génétique », projet de fin d'étude soutenue le 27 juin 2004 à l'UST Oran.
- [27] Joël Quinqueton « Les systèmes multi-agents comme simulation des phénomènes émergents chez les insectes sociaux », 1er séminaire (9/12/2004) Université de Montpellier.
- [28] Dorigo M., « Optimisation learning and natural algorithms », PhD Thesis, Dipartimento Di elettronica, politecnico di Milano, Italt, 1992.
- [29] Zeblah A « Réalisation d'un Algorithme pour la planification et le developement optimale de la puissance électrique » ; thèse de magister soutenue en 1996 à l'UST Oran.
- [30] Roger BALLAY, Jacques JOUAIRE, Pierre MANUEL et Christian AUCOURT : « Développement du réseau de transport et environnement » Electricité de France - Direction des Etudes et Recherches, CLAMART, FRANCE.
- [31] Pierre BORNARD : « Conduite d'un système de production-transport », EDF.
- [32] Pierre BORNARD et Michel PAVARD : « Réseaux d'interconnexion et de transport : réglage et fonctionnement », EDF.
- [33] PERSOZ H. et ADJEMIAN R. « Interconnexions et échanges d'énergie électrique en Europe », EDF.
- [34] Charles AVRIL : « Construction des lignes aériennes à haute tension ». Editions Eyrolles, Paris V 1974.